Tonstrukturen, Tonleitern und Akkorde

1 Tonstrukturen und Stimmungen

Regelmässige, periodische und nicht abrupte Luftdruckveränderung nehmen wir unter bestimmten Bedingungen akustisch wahr. Den jeweiligen Luftdruck kann man in Abhängigkeit von der Zeit (z.B. gemessen in Hundertstelsekunden) in einem Koordinatensystem darstellen. Es entsteht eine typische Wellenform, und wir sprechen von Schallwellen:

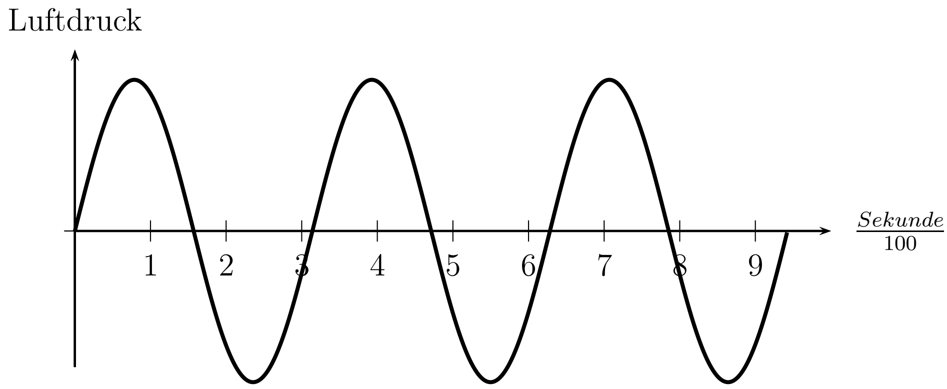

Abbildung 1: Luftdruck in Abhängigkeit von der Zeit bei regelmässiger, periodischer und nicht abrupter Luftdruckveränderung; x-Achse = mittlerer Luftdruck

Die Abweichungen der Maxima und Minima von der x-Achse (= mittlerer Luftdruck) drücken die Lautstärke aus (Amplitude). Eine Zeiteinheit geteilt durch die zweifache Länge zwischen zwei Querungen der x-Achse ist die Frequenz. Gewöhnlich wird als Zeiteinheit die Sekunde gewählt. Die entsprechende Masseinheit wird mit „Hertz“ (Hz) bezeichnet. Die Frequenz bestimmt die Höhe der akustischen Wahrnehmung. In der obigen Graphik würde sich, da die x-Achse in Hundertstelsekunden beschriftet ist, eine Frequenz von etwas mehr als 30 Hz ergeben.

Der Begriff „Klang“ bezeichnet in der Akustik oft eine Schallwelle, die aus einer Grundwelle besteht (Grundton mit Grundfrequenz) und die von Wellen überlagert wird, deren Frequenzen Vielfache der Frequenz der Grundwelle sind. Diese Wellen werden „Obertöne“ genannt und deren Frequenzen „Oberfrequenzen“. Entsprechend kann man den Klang auch als eine spezifische *Menge* von derartigen regelmässigen und periodischen Schallwellen betrachten. Die Amplitude der Obertöne nimmt in Abhängigkeit von deren Höhe tendenzmässig monoton ab. Dieser akustische Klangbegriff entspricht in etwa dem musikalischen Begriff „Ton“, wobei bei letzterem Geräusche und unterschiedliche Amplituden der Wellen mit Oberfrequenzen (Formanten!) mitwirken können, welche die Klangfarbe einer Stimme oder eines Instrumentes ausmachen. Lässt man diesen Aspekt weg und definiert eine strikt-monoton sinkende Funktion, welche die Abnahme der Amplituden der Obertöne definiert, so kann man von „reinen Tönen“ reden. Reine Töne unterscheiden sich nicht mehr von Instrument (Stimme) zu Instrument (Stimme).

Zwischen den reinen Tönen und deren Grundfrequenzen kann man eine Bijektion fr definieren, d.h. es liegt eine eineindeutige Beziehung zwischen den reinen Tönen und ihren Grundfrequenzen vor. In der Folge beschäftigen wir uns nur mit reinen Tönen und lassen deshalb die Charakterisierung „rein“ weg. Zuerst wird eine allgemeine Definition von sogenannten Tonstrukturen geliefert.

Definition 1. *Eine Tonstruktur ist ein 4-Tupel (o, B, F, fr), so dass o ein Ton ist, B eine Menge von Tönen, die o enthält. F ist eine Menge von Frequenzen und fr eine bijektive Abbildung von B nach F, so dass*

1. *$fr(c)$ die tiefste Frequenz (= Grundfrequenz) aller Frequenzen des Tones c ist*
2. *der Ton b höher als der Ton c ist genau dann, wenn $fr\,(b) > fr\,(c)$ und*
3. *der Ton b derselbe wie der Ton c ist genau dann, wenn $fr\,(b) = fr\,(c)$.*
4. *o ist der Grundton der Tonstruktur, d.h. $fr\,(c) \geq f(o)$ für alle $c \in B$.*

Da jedem Ton durch fr eine Frequenz entspricht und Frequenzen geordnet sind (für zwei Frequenzen x und y gilt: $y = x$ oder $x < y$ oder $x > y$), sind auch Töne geordnet.

Als nächstes gilt es, Mengen B von Tönen festzulegen, um spezifische, musikalisch geeignete Tonstrukturen zu erhalten. Dazu brauchen wir den Intervallbegriff sowie einen Längenbegriff für Intervalle, was zu einem Distanzbegriff für Töne führt.

Definition 2. *Die Menge der Töne I, so dass $I = \{z | f(b) \leq f(z) < f(c)$ und $z, b, c \in B$ der Tonstruktur $(o, B, F, fr)\}$ nennen wir Intervall zwischen b und c der Tonstruktur (o, B, F, fr).*

Bemerkung 3. *Gewöhnlich werden in der Musiktheorie Intervalle durch den Abstand zwischen zwei Tönen definiert, also durch die Länge des Intervalles.*

Definition 4. $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \backslash \{0\}$ *(die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null)*

Definition 5. *Gilt für ein Intervall zwischen a und b, dass $fr\,(b) = 2^n fr\,(a)$, so nennen wir b den n-ten Oktavton von a ($n \in \mathbb{N}^*$). Wir sagen auch, b liege n Oktaven über a. Das Intervall zwischen $2^{n-1}a$ und $2^n a$ heisst n-te Oktave von a. Gilt für ein Intervall zwischen b und a, dass $fr\,(b) = \frac{1}{2^n} fr\,(a)$, so nennen wir b den n-ten unter a liegenden Oktavton von a ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Bemerkung 6. *Für Oktavtöne typisch ist, dass die Menge der Oberfrequenzen höherer Oktavtöne jeweils eine echte Teilmenge der Menge der Oberfrequenzen der tieferen Oktavtöne ist. Wir betrachten die Ton b samt seinen Oberfrequenzen* $nfr(b), n \in \mathbb{N}^*$. *Sei* b' *der erste Oktavton von b mit seinen Oberfrequenzen* $nf(b')$. *Nun gilt gemäss Definition für den ersten Oktavton* $nfr(b') = 2nfr(b)$. *Damit sind die Oberfrequenzen von* nb' *auch Oberfrequenzen von b, da* $2n \in \mathbb{N}^*$. *Die Teilmenge ist echt, da z.b.* $3fr(b)$ *nicht Element der Menge der Oberfrequenzen von* nb' *ist.*

Bemerkung 7. *Da zwischen den Grundfrequenzen der Töne und den Tönen eine Bijektion existiert, beziehen wir uns künftig oft mit dem Ausdruck „Frequenz eines Tones" auf die Grundfrequenz des Tones.*

Bemerkung 8. *Der von Menschen hörbare Bereich liegt – ja nach Alter – zwischen 16 Hz und 20000 Hz. Man könnte die vorangehende Definition entsprechend einschränken.*

Definition 9. *Die Länge des Intervalles zwischen b und c mit* $fr\,(c) > fr\,(b)$ *ist* $\frac{fr(c)}{fr(b)}$.

Die Länge von Intervallen wird also durch Frequenzverhältnisse ausgedrückt. Begründung: Das Intervall zwischen zwei benachbarten Oktavtönen von a sollte dieselbe Länge haben. Betrachten wir den 1. und 2. Oktavton des Tones mit der Frequenz 200, so beträgt die Differenz der Frequenzen $4 \cdot 200 - 2 \cdot 200 = 400$. Betrachten wir den 2. und 3. Oktavton dieser Frequenz, beträgt die Differenz hingegen $8 \cdot 200 - 4 \cdot 200 = 800$. Würde man die Länge von Intervallen mit Hilfe von Differenzen von Frequenzen definieren, hätten Oktaven jeweils unterschiedliche Längen. Bei Frequenzverhältnissen ist das anders: $\frac{4 \cdot 200}{2 \cdot 200} = \frac{8 \cdot 200}{4 \cdot 200}$.

1.1 Die Natürliche Tonstruktur

Definition 10. *Eine Tonstruktur* (o, B, F, fr) *heisst Natürlich genau dann, wenn* $B = \{b \mid fr\,(b) = nfr\,(o)$ *und* $n \in \mathbb{N}^*\}$.

Eine Tonstruktur mit den Grundton o ist damit Natürlich, wenn sie alle Töne enthält, deren Grundfrequenz ein n-Vielfaches der Grundfrequenz des Grundtones ist und n eine von 0 verschiedene Natürliche Zahl ist. Wir schreiben für die Natürliche Tonstruktur $(o, B, F, fr)^n$.

Die Frequenzverhältnisse zum Grundton sind gegeben durch $\frac{nfr(o)}{fr(o)} = n$.

Wählen wir für den Grundton $o := C := 66Hz$, erhält man (c_n für $n-$ gestrichenes c) (s. Tabelle 1):

		Frequenz	Frequenzverhältnis zum Vorton der Liste	Name des Intervalls zwischen den aufeinanderfolgenden Tönen
$fr(\mathrm{C}) =$	$1 \cdot 66 =$	**66**		
$fr(\mathrm{c}) =$	$2 \cdot 66 =$	**132**	2/1	Oktave
$fr(\mathrm{g}^n) =$	$3 \cdot 66$	198	3/2	Reine Quint
$fr(\mathrm{c}_1) =$	$4 \cdot 66 =$	**264**	4/3	Reine Quart
$fr(\mathrm{e}_1^n) =$	$5 \cdot 66 =$	330	5/4	Harmonische grosse Terz
$fr(\mathrm{g}_1^n) =$	$6 \cdot 66 =$	396	6/5	Harmonische kleine Terz
$fr(\mathrm{b}_1^n) =$	$7 \cdot 66 =$	462	7/6	
$fr(\mathrm{c}_2) =$	$8 \cdot 66 =$	**528**	8/7	
$fr(\mathrm{d}_2^n)$	$9 \cdot 66 =$	594	9/8	Harmonische grosse Sekunde
$fr(\mathrm{e}_2) =$	$10 \cdot 66 =$	660	10/9	grosser Ganzton
$fr(\mathrm{f}_2^n) =$	$11 \cdot 66$	706	11/10	
$fr(\mathrm{g}_2) =$	$12 \cdot 66 =$	792	12/11	
$fr\,(\mathrm{as}_2^n) =$	$13 \cdot 66 =$	858	13/12	
$fr\,(\mathrm{b}_2^n) =$	$14 \cdot 66 =$	924	14/13	
$fr(\mathrm{h}_2^n) =$	$15 \cdot 66 =$	990	15/14	
$fr\,(\mathrm{c}_3)$	$16 \cdot 66 =$	**1056**	16/15	Harmonischer Halbton
	$17 \cdot 66 =$	1122	17/16	
$fr\,(\mathrm{d}_3^n)$	$18 \cdot 66 =$	1188	18/17	
	$19 \cdot 66 =$	1254	19/18	
$fr\,(\mathrm{e}_3^n)$	$20 \cdot 66 =$	1320	20/19	
	etc.			

Tabelle 1: Frequenzen der Töne der Natürlichen Tonstruktur bei der Wahl von o:=C:=66Hz

Bemerkung 11. *C (grosses C) wird gewöhnlich mit der Frequenz* $440 \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{2^3} = 65.406Hz$ *definiert, da man vom Kammerton* $a_1 = 440Hz$ *ausgeht.*

Bemerkung 12. *In der ersten Oktave hat es einen Ton, in der zweiten zwei, in der dritten vier, etc. Man erhält die Anzahl der Töne pro Oktave mittels der Formel ($k \in \mathbb{N}^*$, k für die k-te Oktave).*

$$2^k - 2^{k-1} = \frac{1}{2} 2^k$$

2^k *ist die Anzahl der Töne mit einer Frequenz kleiner-gleich dem Ton* $2^k fr(o)$*. Damit gilt*

$$2^k - 2^{k-1} = 2 \cdot 2^{k-1} - 2^{k-1} = 2^{k-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^k.$$

Es hat also mit aufsteigenden Oktaven immer mehr Töne in der Oktave. Manche dieser Töne sind oktavierte Töne der tieferen Oktaven. Offensichtlich steigt auch die Zahl der Töne, die nicht oktavierte Töne von tieferen Oktaven sind. In der ersten Oktave hat es keine solche Töne, in der zweiten einen, in der dritten zwei, in der vierten vier, in der *fünften 8, etc. Es handelt sich um Töne mit ungeradem n, da Oktaven von $fr(c)$ durch Multiplikation mit 2^n erreicht werden und 2^n eine gerade Zahl ist. Allgemein besteht die Anzahl der Töne für die $k-te$ Oktave, die nicht oktavierte Töne tieferer Oktaven sind, aus den ungeraden n. Man erhält*

$$\begin{cases} 0 & \textit{für } k = 1 \\ 2^{k-1} - 2^{k-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^k & \textit{für } k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\} \end{cases}$$

mit k für die $k-te$ Oktave. Man muss die Anzahl ungerader n zwischen 2^k und 2^{k-1} bestimmen. Die Anzahl der n zwischen 2^k und 2^{k-1} beträgt, wie bereits erwähnt, $2^k - 2^{k-1} = \frac{1}{2}2^k$. Die Hälfte davon sind ungerade:

$$\frac{\frac{1}{2}2^k}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2^k$$

Offensichtlich geht $\frac{1}{4}2^k$ für steigendes k gegen Unendlich. Es gibt also abzählbar unendlich viele verschiedene Töne, die nicht oktavierte Töne tieferer Oktaven sind.

Mit der Natürlichen Tonstruktur ergibt sich das Problem, dass in den ersten Oktaven jeweils zuwenig Töne vorkommen. Man könnte versucht sein, das Problem zu lösen, indem man die Töne der höheren Oktaven hinunter oktaviert. Da es unendlich viele gibt, wird damit aber die erste Oktave aufgefüllt und man hat dort zuviele Töne. Es stellt sich das Problem der Auswahl der Töne, wenn man nur endlich viele Töne in den Oktaven haben will. Ein Lösungsversuch stellt die in der Folge diskutierte Pythagoräische Tonstruktur dar.

Bemerkung 13. *Das Ziel, endlich viele Töne in der ersten Oktave zu haben, war historisch gesehen nicht Triebfeder der Entwicklung. Zudem wird durch fliessende Übergänge zwischen den Tönen, durch Vibrato und Ziehen an den Saiten z.B. nicht auf Zwischentöne verzichtet. Trotzdem trägt – wenigstens in der traditionellen westlichen Musik, aber nicht nur dort – das System mit 12 Tönen pro Oktave das Spiel.*

Eine konkrete Natürliche Tonstruktur erhält man durch die Festlegung des Grundtones o.

Definition 14. *Eine Tonstruktur, welche die Töne der ersten Oktave sowie alle und nur die oktavierten Töne der ersten Oktave enthält, wird „oktav-periodisch" genannt.*

Die Natürliche Tonstruktur ist nicht oktav-periodisch.

1.2 Die Pythagoräische Tonstruktur

Man geht von Oktaven und Reinen Quinten aus. Diese weisen einerseits die einfachsten Frequenzverhältnisse auf (2/1 und 3/2). Zudem sind zwei Töne, die durch eine Oktave oder durch eine Quint getrennt sind, verbreiteten Hörgewohnheiten entsprechend, gleichzeitig gespielt besonders wohltönend. Man verlangt in einem ersten Versuch,

1. dass in der Tonstruktur für jeden Ton der Reine Quintton und
2. für jeden Ton der Oktavton existiert.
3. Zuletzt werden die Quinttöne in die unteren Oktaven hinunteroktaviert, um die tieferen Oktaven aufzufüllen.

Wie wir gleich sehen werden, genügen diese Festlegungen noch nicht, um nur endlich viele Töne pro Oktave zu erhalten.

Man erhält für die ersten Quinten der Folge von Quinten $[66Hz, 132Hz)$ von C (s. Tabelle 2):

	Frequenzen		hinunteroktavierte Frequenzen
$fr(\mathrm{C}) =$	$1 \cdot 66$	$fr(\mathrm{C})$	66
$fr(\mathrm{G}^q) =$	$\frac{3}{2} \cdot 66 = 99$	$fr(\mathrm{G}^q) =$	$\frac{3}{2} \cdot 66 = 99.0$
$fr(\mathrm{d}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 66 = 148.5$	$fr(\mathrm{D}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 66 \cdot \frac{1}{2} = 74.25$
$fr(\mathrm{a}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 66 = 222.75$	$fr(\mathrm{A}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 66 \cdot \frac{1}{2} = 111.38$
$fr(\mathrm{e}_1^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 66 = 334.13$	$fr(\mathrm{E}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 83.531$
$fr(\mathrm{h}_1^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 66 = 501.19$	$fr(\mathrm{H}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 125.30$
$fr(\mathrm{fis}_2^q) = fr(\mathrm{ges}_2^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot 66 = 751.78$	$fr(\mathrm{Ges}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 93.973$
$fr(\mathrm{des}_3^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 66 = 1127.7$	$fr(\mathrm{Des}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 70.479$
$fr(\mathrm{as}_3^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot 66 = 1691.5$	$fr(\mathrm{As}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 105.72$
$fr(\mathrm{es}_4^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^9 \cdot 66 = 2537.3$	$fr(\mathrm{Es}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^9 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 79.289$
$fr(\mathrm{b}_4^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot 66 = 3805.9$	$fr(\mathrm{B}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 118.93$
$fr(\mathrm{f}_5^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot 66 = 5708.8$	$fr(\mathrm{F}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 89.201$

Tabelle 2: Frequenzen der Tonstruktur, die aus Reinen Quinten aufgebaut ist

Nach den hinunteroktavierten Frequenzen geordnet ergibt sich (s. Tabelle 3)

$fr(\mathrm{C}) =$	hinunteroktavierte Frequenzen 66	Frequenzverhältnis zum vorangehenden Ton der Liste
$fr(\mathrm{Des}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 70.479$	$70.479/66 = 1.0679$
$fr(\mathrm{D}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 66 \cdot \frac{1}{2} = 74.25$	$74.25/70.479 = 1.0535$
$fr(\mathrm{Es}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^9 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 79.289$	$79.289/74.25 = 1.0679$
$fr(\mathrm{E}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 83.531$	$83.531/79.289 = 1.0535$
$fr(\mathrm{F}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 89.201$	$89.201/83.531 = 1.0679$
$fr(\mathrm{Ges}^q) = fr(\mathrm{Fis}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 93.973$	$93.973/89.201 = 1.0535$
$fr(\mathrm{G}^q) =$	$\frac{3}{2} \cdot 66 = 99$	$99/93.973 = 1.0535$
$fr(\mathrm{As}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 105.72$	$105.72/99 = 1.0679$
$fr(\mathrm{A}^q) =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 66 \cdot \frac{1}{2} = 111.38$	$111.38/105.72 = 1.0535$
$fr(\mathrm{B}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 118.93$	$118.93/111.38 = 1.0678$
$fr(\mathrm{H}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 125.30$	$125.30/118.93 = 1.0536$

Tabelle 3: Tabelle mit den hinunteroktavierten Frequenzen beim Anfügen Reiner Quinten

Es ergeben sich mehrere Probleme mit dieser Tonstruktur, die man Reine-Quinten-Tonstruktur nennen könnte. Man sieht, dass die Intervalle zwischen benachbarten Tönen nicht immer gleich lang sind: es gibt zwei unterschiedliche Längen. Dies hat Auswirkungen auf die übrigen Intervalle. Dies wirkt sich u.a. darauf aus, dass man Musikstücke in dieser Tonstruktur bei gegebener Stimmung nicht beliebig in solche mit einem anderem Grundton transponieren kann.

Wichtiger noch: die vorgeschlagene Tonstruktur löst das Problem der Wahl der Töne nicht. Bildet man nach dem obigen Verfahren die Quint über f_5^q und oktaviert diesen Quintton in die erste Oktave hinunter, erhält man:

Frequenz	hinunter oktavierte Frequenz
$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot 66 = 8563.3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = 66.9$

Man erhält einen Ton, der mit keinem der Töne der obigen Liste identisch ist. Für

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{24} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 67.813$$

erhält man in der eingeführten Tonstruktur einen weiteren Ton, der nahe bei 66.9 liegt und nicht mit einem Ton der obigen Liste übereinstimmt. In der Tat weist die Menge der in die erste Oktave hinunteroktavierten Quintöne abzählbar unendlich viele von einander verschiedene Töne auf, was sich durch den Beweis des folgenden Satzes ergibt:

Theorem 15. *Die Menge*

$$Q := \{x | \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}, 1 < x = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^m < 2\}$$

ist abzählbar unendlich.

Beweis. Wie zeigen zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$1 < \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^m < 2$$

Sei $n \in \mathbb{N}^*$, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < y < 2^m$ so dass

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m + y.$$

Man wählt das grösste m, so dass $2^m < \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Für $n = 1$, gibt es ein solches, nämlich $m = 0$. Wenn für ein beliebiges n ein m gibt, mit $2^m < \left(\frac{3}{2}\right)^n$, so gilt dies auch für $n+1$, da dann $2^m < \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$. Entweder ist dann m das grösste, das die Ungleichung erfüllt oder gibt es grösseres m, das die Ungleichung erfüllt. Für das grösste m gibt es ein y mit $0 < y < 2^m$ und $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m + y$. Wäre $y > 2^m$, gäbe es ein z mit $0 < z \in \mathbb{R}$ und $y = 2^m + z$. Damit wäre $2^m + y = 2^m + 2^m + z = 2 \cdot 2^m + z = 2^{m+1} + z$. Das gewählte m wäre nicht das grösste.

Zudem kann y nicht 0 sein, da sonst $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$ wäre. Dies ist für $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ nicht möglich. Gäbe es nämlich solche n und m mit $\frac{3}{2}^n = 2^m$, gälte durch Logarithmieren beider Seiten

$$n \log_2 \frac{3}{2} = m \log_2 2 = m$$

und damit

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Nun ist aber $\log_2 \frac{3}{2}$ keine Rationale Zahl. Wäre nämlich $\log_2 \frac{3}{2}$ rational, gäbe es ganze Zahlen p und q ($q \neq 0$) mit:

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{p}{q}$$

woraus gemäss Logarithmusdefinition folgt

$$2^{\frac{p}{q}} = \frac{3}{2},$$

woraus sich

$$2^{1+\frac{p}{q}} = 2^{\frac{q+p}{q}} = 3$$

ergibt. Durch Potenzieren mit q folgt

$$2^{q+p} = 3^q$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der beiden Ausdrücke, können diese nicht identisch sein. Also ist $\log_2 \frac{3}{2}$ nicht rational, womit

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

nicht möglich ist und damit auch $\frac{3}{2}^n = 2^m$ widerlegt ist.
Man erhält mit diesen Ergebnissen

$$0 < \frac{y}{2^m} < 1$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^m &= (2^m + y)\left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^m \left(\frac{1}{2}\right)^m + y\left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &= 1 + \frac{y}{2^m} \in \ ]1, 2[.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$1 < \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^m < 2$$

Als nächstes geht es darum zu zeigen, dass es unendlich viele Quinttöne gibt, die nicht Oktavierungen anderer Quinttöne sind. Dazu kann man die stärker Aussage beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein eindeutiges $x_n \in Q$ existiert. Man muss zeigen, dass $x_n \neq x_{n'}$ für $n \neq n'$. Für eine reductio ad absurdum nimmt man an, dass es ein $x_n = x_{n'}$ für $n \neq n'$ gibt. Damit gilt dann

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{3}{2}\right)^{n'} \left(\frac{1}{2}\right)^{m'}$$

und durch Verteilen der Hochzahlen

$$\begin{aligned} \frac{3^n}{2^n 2^m} &= \frac{3^{n'}}{2^{n'} 2^{m'}} \Longrightarrow \\ 3^n 2^{n'+m'} &= 3^{n'} 2^{n+m} \end{aligned}$$

Da jede positive ganze Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt, hat diese Gleichung für $n \neq n'$ keine Lösung. Für jedes n gibt es also genau ein x_n, womit auch gezeigt ist, dass Q abzählbar unendlich ist. □

Der Beweis zeigt also sogar eine stärkere Aussage als die abzählbare Unendlichkeit der Menge der Quinttöne: alle Quinttöne der Folge sind in die erste Oktave hinunteroktaviert von allen anderen verschieden. Durch die Tonstruktur der Quinttöne ist entsprechend das Problem der Auswahl der Töne für die erste Oktave nicht gelöst.

Bemerkung 16. *Das Verhältnis der Frequenz 66.9 zur Frequenz 66 des Grundtones beträgt*

$$\frac{66.9}{66} = 1.0136 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

und wird „Pythagoräisches Komma“ genannt. Es handelt sich um eine rationale Zahl. Spielt man diesen Ton zusammen mit dem Grundton, erfolgt ein Zweiton-Akkord, der gemäss verbreiteten Hörgewohnheiten misstönend ist. Wird der Ton mit der Frequenz 66.9 *oktaviert, erhält man für jede Oktave eine Ton, der sehr nahe beim entsprechend oktavierten C liegt.*

Bemerkung 17. *Das erwähnte Problem hängt mit der Tatsache zusammen, dass 12 übereinandergelegte Quinten* $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ *nicht genau 7 Oktaven* (2^7) *ergeben. Man erhält als Frequenzverhältnis dieser beiden Töne wieder das Pythagoräische Komma*

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

Das Problem, das durch Hinunteroktavierungen der Folge von Quinttönen erfolgt, könnte man lösen, indem man alle Quinten leicht verkleinert, so dass 12 Quinten 7 Oktaven ergeben. Es würde eine oktav-periodische Tonstruktur resultieren mit endlich vielen hinunteroktavierten Tönen in der ersten Oktave. In diesem Falle würde gelten

$$x^{12} = 2^7$$
$$x = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7} \approx 1.4983$$

Es handelt sich um eine nicht-rationale reelle Zahl. Wieso bei den Griechen bis ins Mittelalter der Weg über nicht-rationale Zahlen nicht gewählt wurde, darüber kann man nur spekulieren. Einerseits wurden nicht-rationale Zahlen von manchen Pythagoräern nicht akzeptiert, obwohl der Satz von Pythagors unmittelbar zum Problem einer auf rationale Zahlen beschränkten Mathematik führt - die Länge der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit Schenkeln der Länge 1 beträgt ja $\sqrt{2}$. Andererseits wurden die entsprechenden Intervalle eventuell als misstönend wahrgenommen, obwohl sich die gleichmässige von der Reinen Quint nur minimal unterscheidet. Jedenfalls wurde nicht der Weg der gleichmässigen Verminderung aller Quinten gewählt: man verkleinerte nur eine der Quinten um das Pythogoräische Komma (Wolfsquinte) und beliess die übrigen Quinten „rein“. Für das verkleinerte Intervall gilt:

$$x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{11} = 2^7 \Longrightarrow x = \frac{262\,144}{177\,147} \approx 1.4798$$

Man erhält die Verhältniszahl der Wolfsquinte auch durch $\frac{3}{2} / \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7\right) = 1.4798$

Die verkleinerte Quinte wird gewöhnlich von As^q nach Es^q eingefügt. Es entsteht Es^p. Die im Quintenzirkel folgenden Töne b$_4^q$ und f$_5^q$ vermindern sich entsprechend ebenfalls um das Pythagoräische Komma und werden zu b$_4^p$ und f$_5^p$. Man erhält also die in die erste Oktav hinunteroktavierten Töne (s. Tabelle 4):

$fr(\text{Des}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 70.479$	$70.479/66 = 1.0679$
$fr(\text{D}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 66 \cdot \frac{1}{2} = 74.25$	$74.25/70.479 = 1.0535$
$fr(\text{Es}^p)$	$\frac{262\,144}{177\,147} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 78.222$	$78.222/74.25 = 1.0535$
$fr(\text{E}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 83.531$	$83.531/79.289 = 1.0535$
$fr(\text{F}^p)$	$\frac{262\,144}{177\,147} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 88.0$	$88/83.531 = 1.0535$
$fr(\text{Fis}^q)$=$fr(\text{Ges}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 93.973$	$93.973/89.201 = 1.0535$
$fr(\text{G}^q)$	$\frac{3}{2} \cdot 66 = 99$	$99/93.973 = 1.0535$
$fr(\text{As}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 105.72$	$105.72/99 = 1.0679$
$fr(\text{A}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 66 \cdot \frac{1}{2} = 111.38$	$111.38/105.72 = 1.0535$
$fr(\text{B}^p)$	$\frac{262\,144}{177\,147} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 117.33$	$117.33/111.38 = 1.0534$
$fr(\text{H}^q)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 66 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 125.30$	$125.30/118.93 = 1.0536$

Tabelle 4: Frequenzen der Töne der ersten Oktave der Pythagoräischen Tonstruktur bei der Wahl von o:=C:=66

Die meisten Intervalle zwischen benachbarten Tönen weisen nun eine Länge von 1.0534 auf. Es gibt aber immer noch unterschiedliche Längen zwischen benachbarten Tönen.

Man erhält die folgenden Frequenzverhältnisse vom Grundton C aus (s. Tabelle 5):

$fr(\text{C}) = 66$	Berechnung Frequenzverhältnis	Frequenzverhältnis	Name des Intervalls
C nach Des^q:	$\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$	$\frac{2187}{2048}$	Pyth. kl. Sekunde
C nach D^q:	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} =$	$\frac{9}{8}$	Harmonische gr. Sekund
C nach Es^p:	$\frac{262\,144}{177\,147} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$	$\frac{32}{27}$	Pyth. kl. Terz
C nach E^q:	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$	$\frac{81}{64}$	Pyth. gr. Terz
C nach F^p:	$\frac{262\,144}{177\,147} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$	$\frac{4}{3}$	Reine Quart
C nach Ges^q :	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	$\frac{729}{512}$	Pyth. Tritonus
C nach G^q:		$\frac{3}{2}$	Reine Quint
C nach As^q:	$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$	$\frac{6561}{4096}$	Pyth. kl. Sext
C nach A^q:	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} =$	$\frac{27}{16}$	Pyth. gr. Sext
C nach B^p:	$\frac{262\,144}{177\,147} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$	$\frac{16}{9}$	Harmonische kl. Sept
C nach H^q:	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$	$\frac{243}{128}$	Pyth. gr. Sept

Tabelle 5: Tabelle mit Pythogoräischen Intervallen vom Grundton aus

Da nicht alle kleinen Sekunden gleich lang sind, sind auch nicht alle grossen Sekunden, Terzen, Quarten, Quinten, etc. jeweils gleich lang. Entsprechend kann man Musikstücke nicht ohne Umstimmen transponieren und Wechsel in andere Tonarten sind in einer Pythagoräischen Tonstruktur nicht möglich, ohne Disharmonien zu erzeugen.

Es folgt noch eine formelle Definition der Pythagoräischen Tonstruktur .

Definition 18. *Die Pythagoräische Tonstruktur* $(o, B, F, fr)^p$ *ist bestimmt*

1. *durch die Menge* B *der Töne, die*
   (a) *sich gemäss den Frequenzverhältnissen der Tabelle 5 aus dem Grundton* o *ergeben und*
   (b) *die die Oktavtöne über diesen Tönen enthält.*
2. *durch die Festlegung der Frequenz des Grundtones* o*.*

Gemäss 1.(b) der Definition, ist die Pythagoräische Tonstruktur oktav-periodisch.

Bemerkung 19. *Die Pythagoräische Tonstruktur hat ein paar erwähnenswerte Eigenschaften: Betrachtet man die Tonstruktur* $(C, B, F, fr)^p$ *und die Töne C, D, E, F, G, A, H, c, dann weisen alle Ganztonschritte einerseits und alle Halbtonschritte andererseits dasselbe Frequenzverhältnis auf: c-d:* $\frac{9}{8}$, *d-e:* $\left(\frac{81}{64}/\frac{9}{8}\right) = \frac{9}{8}$; *f-g:* $\left(\frac{3}{2}/\frac{4}{3}\right) = \frac{9}{8}$ *g-a:* $\left(\frac{27}{16}/\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$; *a-h:* $\left(\frac{243}{128}/\frac{27}{16}\right) = \frac{9}{8}$ *und für die Halbtonschritte: e-f:* $\left(\frac{4}{3}/\frac{81}{64}\right) = \frac{256}{243}$; *h-c:* $\left(\frac{2}{1}/\frac{243}{128}\right) = \frac{256}{243}$. *Dies gilt nicht mehr,wenn man in dieser Tonstruktur zur Tonfolge D, E, Fis, G, A,H, Cis, d übergeht. Zwischen Fis und E ergibt sich z.B. :* $\left(\frac{729}{512}/\frac{4}{3}\right) = \frac{2187}{2048}$.
Zudem ist erwähnenswert, dass in dieser Tonstruktur die Quinten C-G, D-A, E-H, F-c Rein sind, zudem auch die Quarten C-F, D-G, E-A, G-c, wie man selber nachrechnen kann. Für die übrigen Quinten und Quarten gilt dies nicht. Weniger schön ist zudem, dass zwei Halbtöne zusammen weniger als den durch $\frac{9}{8}$ *gegebenen Ganzton bilden:* $\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{65\,536}{59\,049}$. *Das Frequenzverhältnis der beiden beträgt:* $\left(\frac{9}{8}/\frac{65\,536}{59\,049}\right) = \frac{531\,441}{524\,288} = 1.013\,6$ *(= Pythagoräisches Komma). Zudem ergeben 6 Ganztonschritte nicht die Oktave:* $\left(\frac{9}{8}\right)^6 = \frac{531\,441}{262\,144} = 2.027\,3 > 2$. *Das Verhältnis zur Oktave ergibt wiederum das Pythagoräische Komma:* $\left(\left(\frac{9}{8}\right)^6/2\right) = \frac{531\,441}{524\,288} = 1.013\,6$.

1.3 Die Harmonische oder Reine Tonstruktur

Bis zum Mittelalter war die Pythagoräische Stimmung verbreitet. Nachher verwendete man vorerst die Harmonische oder Reine Stimmung, die man aus der Pythagoräischen Tonstruktur wie folgt erhält: Man übernimmt die Frequenzverhältnisse der Pythagoräischen Intervalle ausser bei der kleinen Sekunde, der kleinen und grossen Terz, der kleinen und grossen Sext und der grossen Sept. Man definiert diese wie folgt neu:

Definition 20.
- *Die Pythogoräische kleine Terz wird durch das einfacher Frequenzverhältnis* $\frac{6}{5}$ *ersetzt (statt* $\frac{32}{27}$*). Wir nennen diese Terz die Harmonische kleine Terz.*
- *Die Pythogoräische grosse Terz wird durch das einfachere Frequenzverhältnis* $\frac{80}{64} = \frac{5}{4}$ *(statt* $\frac{81}{64}$*) ersetzt. Wir nennen diese Terz die Harmonische grosse Terz.*
- *Die Harmonische kleine Sekunde wird gebildet durch das Abziehen der Harmonischen grossen Terz von der Reinen Quarte:* $\frac{4}{3}/\frac{5}{4} = \frac{16}{15}$.
- *Die Pythagoräische kleine Sext* $\frac{6561}{4096}$ *wird ersetzt durch die Harmonische kleine Sext* $\frac{16}{9}$.
- *Die Harmonische grosse Sext wird gebildet durch Aneinanderfügen der Reinen Quarte und der Harmonischen grossen Terz:* $\frac{4}{3}\frac{5}{4} = \frac{5}{3}$.
- *Die Harmonische grosse Sept wird gebildet durch Aneinanderfügen der Reinen Quint und der grossen Harmonischen Terz:* $\frac{3}{2}\frac{5}{4} = \frac{15}{8}$.

Die Harmonische Tonstruktur kann man aber auch aus der Natürlichen Tonstruktur entwickeln. Man erhält die entsprechenden Frequenzverhältnissen als Verhältnisse zwischen

Frequenzen von Tönen der Natürlichen Tonstruktur. So ist z.B. das Frequenzverhältnis zwischen dem 3. und dem 2. Ton der Natürlichen Tonstruktur $\frac{3 \cdot fr(o)}{2 \cdot fr(o)} = \frac{3}{2}$.

Wir definieren (s. Tabelle 6):

Verwendete Töne der Natürlichen Tonstruktur	Frequenzverhältnis	Name
2. und 1. Ton	$\frac{2}{1}$	Oktav
3. und 2. Ton	$\frac{3}{2}$	Reine Quint
4. und 3. Ton	$\frac{4}{3}$	Reine Quart
5. und 4. Ton	$\frac{5}{4}$	Harmonische grosse Terz
6. und 5. Ton	$\frac{6}{5}$	Harmonische kleine Terz
9. und 8. Ton	$\frac{9}{8}$	Harmonische grosse Sekund
16. und 15. Ton	$\frac{16}{15}$	Harmonische kleine Sekund
5. und 3. Ton	$\frac{5}{3}$	Harmonische grosse Sext
8. und 5. Ton	$\frac{8}{5}$	Harmonische kleine Sext
16. und 9. Ton	$\frac{16}{9}$	Harmonische kleine Septim
15. und 8. Ton	$\frac{15}{8}$	Harmonische grosse Septim

Tabelle 6: Frequenzverhältnisse der Harmonischen Intervalle vom Grundton aus

Definiert man z.B. den Startton C mit $fr\,(C) = 66$ Hz, erhält man für die übrigen Töne die folgenden Frequenzen (s. Tabelle 7):

			Frequenzverhältnis zum vorangehenden Ton
$fr(\mathrm{C}) =$	$66 \cdot 1 =$	66	
$fr(\mathrm{Cis}^h) =$	$66 \cdot \frac{16}{15} =$	70.4	$\frac{16/15}{1} = 1.0667$
$fr(\mathrm{D}^h) =$	$66 \cdot \frac{9}{8} =$	74.25	$\frac{9/8}{16/15} = 1.0547$
$fr(\mathrm{Es}^h) =$	$66 \cdot \frac{6}{5} =$	79.2	$\frac{6/5}{9/8} = 1.0667$
$fr(\mathrm{E}^h) =$	$66 \cdot \frac{5}{4} =$	82.5	$\frac{5/4}{6/5} = 1.0417$
$fr(\mathrm{F}^h) =$	$66 \cdot \frac{4}{3} =$	88	$\frac{4/3}{5/4} = 1.0667$
$fr(\mathrm{G}^h) =$	$66 \cdot \frac{3}{2} =$	99	
$fr(\mathrm{As}^h) =$	$66 \cdot \frac{8}{5} =$	105.6	$\frac{8/5}{3/2} = 1.0667$
$fr(\mathrm{A}^h) =$	$66 \cdot \frac{5}{3} =$	110	$\frac{5/3}{8/5} = 1.0417$
$fr(\mathrm{B}^h) =$	$66 \cdot \frac{16}{9} =$	117.333	$\frac{16/9}{5/3} = 1.0667$
$fr(\mathrm{H}^h) =$	$66 \cdot \frac{15}{8} =$	123.75	$\frac{15/8}{8/5} = 1.1719$
$fr(\mathrm{c}) =$	$66 \cdot 2 =$	132	$\frac{2}{15/8} = 1.0667$

Tabelle 7: Tabelle mit Harmonischen Intervallen vom Grundton C:=66Hz aus.

Wir nennen diese Zuordnung „Harmonische“ oder „Reine Stimmung“ der Harmonischen Tonstruktur $(c, B, F, fr)^h$.

Definition 21. *Eine Harmonische oder Reine Tonstruktur* $(o, B, F, fr)^h$ *ist bestimmt*

1. *durch die Menge* B *der Töne, die*
   (a) *sich gemäss den Frequenzverhältnissen der Tabelle 7 aus dem Grundton* o *ergeben und*
   (b) *die die Oktavtöne über diesen Tönen enthält.*
2. *durch die Festlegung der Frequenz des Grundtones* o.

Die Harmonische Tonstruktur ist oktavzyklisch – gemäss Punkt 1. (b) der Definition. Es gibt in der Harmonischen Tonstruktur sogar mehr unterschiedliche kleine Sekunden als in der Pythagoräische Tonstruktur, was sich auf die übrigen Intervallle auswirkt. Ist ein Instrument z.B. gemäss $(C, B, F, fr)^h$ gestimmt, kann man auf diesem Instrument nicht ohne weiteres ein Stück in A spielen. Zudem sind nicht mehr alle Ganztonschritte in C, D, E, F, G, A, H, C bezüglich $(C, B, F, fr)^h$ gleich lang, wie man selber nachrechnen kann. Zu beachten ist ferner, dass die Angabe für $fr(fis)$ fehlt. Man könnte sie mittels Reiner Quarte von C nach G und Hinzuzählen des Frequenzverhältnisses von C nach Dis konstruieren. Man erhält $\frac{4}{3}\frac{16}{15} = \frac{64}{45} = 1.4222$. Möglich wäre auch Abzählen der kleinen Sekunde von der Reinen Quint: $\frac{3}{2}/\frac{16}{15} = \frac{45}{32}. = 1.4063$ Man sieht, dass die beiden Definitionen nicht übereinstimmen. Das wie auch immer zu bestimmende Intervall wird Tritonus genannt und wurde früher wegen der mit ihm verbundenen harmonischen Probleme auch der Teufel in der Musik (lateinisch „diabolus in musica“) oder „Teufelsintervall“ genannt.

1.4 Die Gleichmässige Tonstruktur

Die Transpositionsprobleme können gelöst werden, indem man alle Quinten gleichmässig verkleinert (s.o). Bildet man

(1) die Folge von Quinttönen mit diesen verkleinerten Quinten $\left(66 \cdot \sqrt[12]{2}^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ mit den Quinttönen:

$$t_1 = 66; t_2 = t_1 \cdot \sqrt[12]{2}; t_3 = t_2 \cdot \sqrt[12]{2}; t_4 = t_3 \cdot \sqrt[12]{2}; \dots ,$$

(2) oktaviert man die ersten 12 Töne dieser Folge in die erste Oktave hinunter und

(3) ordnet man diese der Grösse nach, erhält man 12 Töne, so dass die Frequenzverhältnisse benachbarter Töne identisch sind (s. Tabelle 8):

1	66	
2	69.92456423	$\frac{69.92456423}{66} = 1.059\,5$
3	74.08249519	$\frac{74.08249519}{69.92456423} = 1.059\,5$
4	78.48766959	$\frac{78.48766959}{74.08249519} = 1.059\,5$
5	83.15478929	$\frac{83.15478929}{78.48766959} = 1.059\,5$
6	88.09943038	$\frac{88.09943038}{83.15478929} = 1.059\,5$
7	93.33809512	etc.
8	98.88826707	
9	104.7684694	
10	110.9983268	
11	117.5986308	
12	124.5914093	
13	132 (Oktavton)	$\frac{132}{124.5914093} = 1.059\,5$

Tabelle 8: In die erste Oktave hinunteroktavierte, geordnete Quinten der Folge von gleichmässigen Quinten

Geht man also von der Folge der gleichmässigen Quinten aus, erhält man man ein System von 12 Tönen pro Oktave, was eventuell erklärt, wieso man oft mit Tonstrukturen von 12 gleichmässig – oder im Falle der Pythagoräischen und Harmonischen Stimmung fast gleichmässig – auf die Oktave verteilten Tönen arbeitet. Die Oktave wird dabei im Falle der Gleichmässigen Stimmung in 12 gleichmässige kleine Sekunden aufgeteilt, die jeweils das Frequenzverhältnis x aufweisen, so dass

$$x^{12} = 2 \Longrightarrow$$
$$x = \sqrt[12]{2} \approx 1.059\,5$$

Der gleichmässigen kleinen Sekunde wird also keine Bruchzahl zugeordnet, sondern eine nicht-rationale reelle Zahl. Der 13. Ton der obigen Folge ist übrigens der Ton mit der Frequenz $66 \cdot \sqrt[12]{2}^{7 \cdot 12} = 8448$, woraus sich um 6 Oktaven hinunterokatviert $8448 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 132$ ergibt, also der 1. Oktavton.

Die Gleichung $x^{12} = 2$ kann man auch durch Logarithmieren lösen, da $2 > 0$ und $x > 0$ – die Basis 2 wählt man, damit rechts 1 entsteht (Logarithmen sind ja Hochzahlen. Die

Hochzahl y, so dass $2^y = 2$ ist offensichtlich 1). :

$$\begin{aligned} \log_2\left(x^{12}\right) &= \log_2(2) \Longleftrightarrow \\ 12\log_2(x) &= 1 \Longleftrightarrow \\ \log_2(x) &= \frac{1}{12} \Longleftrightarrow \\ x &= \exp_2\left(\frac{1}{12}\right) = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} \end{aligned}$$

Von Interesse ist der Zwischenschritt $\log_2(x) = \frac{1}{12}$. Der Logarithmus zur Basis 2 des Frequenzverhältnisses einer gleichmässigen kleinen Sekunde beträgt $\frac{1}{12}$. Wird die Oktave in 6 gleich lange grosse Sekunden (Ganztonintervalle) aufgeteilt, erhält man

$$\begin{aligned} x^6 &= 2 \\ \log_2(x) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Zwei kleine Sekunden aneinandergefügt ergeben dasselbe Resultat, nämlich ein Ganztonintervall : $\frac{1}{12}+\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Man erhält also eine additive Messung der Längen von Intervallen. Wir nennen diese Messskala „Oktavmass“, da eine Oktave der Einheit 1 entspricht: Das Oktavmass weist einer Oktave $\log_2\left(\frac{2}{1}\right) = 1$ zu und zwei aneinandergefügten Oktaven $\log_2\frac{4}{1} = 2$, etc. Allgemein kann man definieren:

Definition 22. *Die Länge eines Intervalls mit Frequenzverhältnis z beträgt im Oktavmass $\log_2(z)$.*

Die Länge des Intervalls, dessen Länge im Frequenzverhältnis $\frac{3}{2}$ (Reine Quint) beträgt, beträgt im Oktavmass $\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = 0.584\,96$. Umgekehrt erhält man $2^{0.584\,96} = \frac{3}{2}$. Misst man die Länge zweier aneinandergefügter Intervalle (z.B. Reine Quint + Reine Quart) mit Hilfe von Frequenzverhältnissen, wird das Produkt der Frequenzverhältnisse berechnet: im Beispiel $\frac{3}{2}\frac{4}{3} = 2 = \frac{2}{1}$. Werden die Intervalllängen mit dem Oktavmass gemessen, ergibt sich:

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\frac{4}{3}\right) = \log_2\left(\frac{3}{2}\right) + \log_2\left(\frac{4}{3}\right) = 1$$

Man kann die Oktav-Messskala aufblasen, indem man sie mit 1200 multipliziert. Man erhält die sogenannte Cent-Skala. Man erhält also für die Intervalllänge x im Frequenzverhältnis die Intervalllänge in Cent mittels

$$1200\log_2(x).$$

In der Cent-Skala misst die gleichmässige kleine Sekunde 100 Cent ($1200 \cdot \log_2(1.\,059\,5) = 100$). 1 Cent entspricht damit dem Frequenzverhältnis

$$2^{\frac{1}{1200}} = \sqrt[1200]{2} = 1.00057779$$

(Kontrolle:$1200\log_2(1.00057779) = 1$)

Für die Gleichmässige Tonstruktur $(C, B, F, fr)^g$ erhält man die folgende Stimmung (s. Tabelle 9):

$fr(\text{C}) =$	$66 \cdot 1 =$	66
$fr(\text{Cis}) = fr(\text{Des})$	$66 \cdot \sqrt[12]{2} \approx$	69.925
$fr(\text{D}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^2 \approx$	74.082
$fr(\text{Dis}) = fr(\text{Es}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^3 \approx$	78.488
$fr(\text{E}) = fr(\text{Fes})$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^4 \approx$	83.155
$fr(\text{F}) = fr(\text{Eis})$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^5 \approx$	88.099
$fr(\text{Fis}) = fr(\text{Ges})$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^6 \approx$	93.338
$fr(\text{G}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^7 \approx$	98.888
$fr\,(\text{Gis}) = fr(\text{As}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^8 \approx$	104.77
$fr(\text{A}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^9 \approx$	111.00
$fr(\text{Ais}) = fr(\text{B}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^{10} \approx$	117.60
$fr(\text{H}) = fr(\text{ces})$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^{11} \approx$	124.59
$fr(\text{c}) =$	$66 \cdot \sqrt[12]{2}^{12} =$	132

Tabelle 9: Frequenzen der Gleichmässigen Stimmung bei C:=66Hz

Die Intervalle sind von allen Tönen aus gleich lang, müssen also nicht in Bezug auf den Grundton der Tonstruktur definiert werden. Deshalb werden wir in der Folge mit den unqualifizierten Intervallenamen „kleine Sekunde“, „grosse Sekunde“, „kleine Terz“,u.sw. jeweils die entsprechenden gleichmässigen Intervalle bezeichnen.

Wir erhalten damit (s. Tabelle 10):

	Länge in Frequenz-verhältnis	Länge in Oktav-mass	Länge in Cent	Anzahl Halbtöne von Gundton weg	Abkürzung für Intervall zum Grundton
kleine Sekunde	$\sqrt[12]{2}$	$\frac{1}{12}$	100	1	$\flat 2$
grosse Sekunde	$\sqrt[12]{2}^2 = \sqrt[6]{2}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	200	2	2
kleine Terz	$\sqrt[12]{2}^3 = \sqrt[4]{2}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	300	3	$\flat 3$
grosse Terz	$\sqrt[12]{2}^4 = \sqrt[3]{2}$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	400	4	3
Quart	$\sqrt[12]{2}^5$	$\frac{5}{12}$	500	5	4
Tritonus	$\sqrt[12]{2}^6 = \sqrt[2]{2}$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	600	6	$\flat 5 = \sharp 4$
Quint	$\sqrt[12]{2}^7$	$\frac{7}{12}$	700	7	5
kleine Sext	$\sqrt[12]{2}^8 = \sqrt[3]{2^2}$	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	800	8	$\flat 6$
grosse Sext	$\sqrt[12]{2}^9 = \sqrt[4]{2^3}$	$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$	900	9	6
kleine Sept	$\sqrt[12]{2}^{10} = 2^{\frac{5}{6}}$	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$	1000	10	$\flat 7$
grosse Sept	$\sqrt[12]{2}^{11}$	$\frac{11}{12}$	1100	11	g7 (j7,maj7)
Oktave	$\sqrt[12]{2}^{12} = 2$	$\frac{12}{12} = 1$	1200	12	8

Tabelle 10: Frequenzverhältnisse der gleichmässigen Intervalle

Für die Reine Quint erhält man :

$$1200 \log_2 \left(\frac{3}{2} \right) = 701.9550009$$

Die Quint in der Gleichmässigen Stimmung entspricht also nicht genau der Reinen Quint. Für die Reine Quart erhält man entsprechend auch eine kleine Abweichung, da die beiden Reinen Intervalle zusammen 1200 Cents ergeben:

$$1200 \log_2 \left(\frac{4}{3} \right) = 498.0449991$$

Um die Abweichungen fürs Gehör einschätzen zu können, s. https://de.wikipedia.org/wiki/Cent_(Musik), wobei dort nicht der Klang der Intervalle für 700 vorgespielt wird – es wird ein Vergleich der Reinen Quint mit einer mitteltönigen Stimmung geliefert (Quintlänge = 697 Cent). Der Unterschied zwischen der Reinen Quint und der Quint der Länge 700 ist also noch kleiner. Frequenzen (mit und ohne Obertöne) eingeben und hören kann man z.B. auch auf http://www.mjtruiz.com/ped/fourier/.

Definition 23. *Die Gleichmässige (Gleichstufige) Tonstruktur* $(o, B, F, fr)^g$ *ist bestimmt*

1. *durch die Menge B der Töne, die*
   (a) *sich gemäss den Frequenzverhältnissen* $\sqrt[12]{2}^k$ *mit* $k \in \mathbb{N}^*_{11}$ *aus o ergeben und*
   (b) *die die Oktavtöne über diesen Tönen enthält.*
2. *durch die Festlegung der Frequenz des Grundtones o.*

Die Gleichmässige Tonstruktur ist oktav-periodisch und es gilt: $2^7 = \left(\sqrt[12]{2}^7\right)^{12}$ (12 aneinandergereihte Quinten sind gleich gross wie 7 anandergereihte Oktaven).

1.5 Obertöne eines Tones und Intervalltöne

Es stellt sich die Frage, wie viele Obertöne ein Ton und der Reine Quintton über diesem Ton gemeinsam haben. Die Obertöne sind identisch, wenn gilt (F für die Frequenz des untersuchten Tones):

$$nF = m\frac{3}{2}F$$
$$n = \frac{3}{2}m$$

wobei $\frac{3}{2}m$ ganzahlig sein muss. Damit ergibt sich, dass m gerade sein muss. Für gerade m gilt damit, dass es ein m' gibt, so dass $m = 2m'$, womit dann $n = 3m'$. Der $3n$-te Oberton des Grundtones ist also mit dem $2n$-ten Oberton des Quinttones identisch (s. Tabelle 11).

n	Obertöne des Grundtones	Obertöne des Quinttones
1	66	99
2	132	**198**
3	**198**	297
4	264	**396**
5	330	495
6	**396**	**594**
7	462	693
8	528	**792**
9	**594**	891
10	660	990
11	726	1089
12	**792**	1188

Tabelle 11: Gemeinsame Obertöne von Reinem Quintton und Grundton

Für Reine Quarten gilt analog:

$$nF = m\frac{4}{3}F$$
$$n = \frac{4}{3}m$$

Wobei m in den natürlichen Zahlen durch 3 teilbar sein muss. Entsprechend ist der $4n$-te Oberton des Grundtones mit dem $3n$-ten Oberton des Reinen Quarttones identisch (s. Tabelle 12).

n	Obertöne des Grundtones	Obertöne des Quarttones
1	66	88
2	132	176
3	198	**264**
4	**264**	352
5	330	440
6	396	**528**
7	462	616
8	**528**	704
9	594	**792**
10	660	880
11	726	968
12	**792**	1056

Tabelle 12: Gemeinsame Obertöne von Reinem Quartton und Grundton

Allgemein gilt: Für ein Intervall, das durch $\frac{o}{p}$ zum Grundton definiert ist, ist der $o \cdot n$-te Oberton des Grundtones mit dem $p \cdot n$-ten Oberton des Intervalltones identisch.

Jeder Intervallton der obigen Art hat damit abzählbar unendlich viele Obertöne mit den Grundton gemeinsam. Allerdings liegen diese weiter auseinander, je grösser die Zahlen der vollständig gekürzten Brüche sind. Unterschiedliche Anzahlen gemeinsamer Obertöne ergeben sich also nur, wenn man ein endliches Intervall für die zu betrachtenden Obertöne festlegt – z.B. den höhrbaren Bereich. In endlichen Intervallen haben Intervalltöne umso mehr gemeinsame Töne mit einem Grundton, je kleiner die Zahlen des vollständig gekürzten Bruches sind, der sie festlegt.

Bezüglich gleichmässigen Intervallen lässt sich folgendes feststellen: Damit die Obertöne bezüglich Quintton übereinstimmen, muss gelten:

$$nF = \sqrt[12]{2}^7 mF$$
$$n = \sqrt[12]{2}^7 m$$

Nun ist $\sqrt[12]{2}^7 m$ für natürliche m immer eine irrationale Zahl, denn $\sqrt[12]{2}^7$ ist irrational. Wäre $\sqrt[12]{2}^7 m$ rational, würde es natürliche Zahlen p und $q \neq 0$ geben, so dass

$$\sqrt[12]{2}^7 m = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow$$
$$\sqrt[12]{2}^7 = \frac{p}{qm}$$

Damit wäre $\sqrt[12]{2}^7$ rational. Aus dem Widerspruch folgt, dass $\sqrt[12]{2}^7 m$ nicht rational ist. Also kann $n = \sqrt[12]{2}^7 m$ nicht sein, da eine irrationale Zahl nicht mit einer natürlichen Zahl identisch sein kann. Entsprechend haben der Ton mit der Frequenz F und der Quintton mit der Frequenz $\sqrt[12]{2}^7 F$ keine gemeinsamen Obertöne. Dies gilt allgemein für

$$n = \sqrt[12]{2}^p m$$

mit einer natürlichen Zahl $p \leq 11$ (ohne die 0). Allerdings ist zu beachten, dass die jeweiligen Obertöne Harmonischer Intervalle und Gleichmässiger Intervalle sehr nahe und konstant bei einander liegen. Es gilt für alle Obertöne der Gleichmässigen und der Reinen Quinte das Frequenzverhältnis

$$\frac{m\frac{3}{2}}{m\sqrt[12]{2}^7} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[12]{2}^7} = 1.001129891$$

Die entsprechenden Verhältnisse gelten auch bezüglich der Gleichmässigen Intervallobertöne und den Grundtonobertönen, da an den Stellen, an denen die Reinen Intervallobertöne mit den Grundtonobertönen übereinstimmen, diese Obertöne identisch sind. Für die übrigen Intervalle erhält man (s. Tabelle 13).

Manchmal wird argumentiert, das Zusammenklingen zweier Töne sei für unser Ohr um so harmonischer, je mehr gemeinsame Obertöne die beiden Töne im hörbaren Bereich haben. Aus der Tatsache allein, dass gewisse Zweiton-Akkorde im höhrbaren Bereich mehr gemeinsame Obertöne haben als andere, lässt sich nicht *schliessen*, dass sie für uns harmonischer klingen. Wie wohltönend das Zusammeklingen von Tönen ist, muss man vielmehr durch empirische Studien in Erfahrung bringen, wobei die wichtige Bedeutung von Hörgewohnheiten im Auge zu behalten ist. Je nach Musikkonsum (z.B. Klassikstreichquartette versus Bebop-Jazz) würden bei vielen unterschiedliche Ergebnisse zu Tage treten. Während vor allem klassische Musiker die Gleichmässige Tönung manchmal schräg finden, empfinden manche Jazz-Musiker die Harmonische Stimmung als falsch oder misstönend (s. Frank Sikora, S. 23). Um die eigene Empfindung zu testen, sei auf s. https://www.musiklehre.at/g7/alle-stimmung-vergleich/ verwiesen.

Bemerkung 24. *In der Geschichte wurden weitere Tonstrukturen definiert, z.B. Varianten, die nahe an der Gleichmässigen Tonstruktur liegen und deren Stimmungen „wohltemperiert“ genannt werden. Bekannt sind etwa auch Tonstrukturen, deren Stimmungen „mitteltönig“ genannt werden. Für Hörbeispiele s. musikanalyse.net oder auch kilchb.de.*

	Harmonisch	Gleichmässig	Frequenzverhältnis
kleine Sekund	$\frac{16}{15}$	$\sqrt[12]{2}$	$\frac{\frac{16}{15}}{\sqrt[12]{2}} = 1.006799267$
grosse Sekund	$\frac{9}{8}$	$\sqrt[12]{2}^2$	$\frac{\frac{9}{8}}{\sqrt[12]{2}^2} = 1.002261058$
kleine Terz	$\frac{6}{5}$	$\sqrt[12]{2}^3$	$\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt[12]{2}^3} = 1.009075698$
grosse Terz	$\frac{5}{4}$	$\sqrt[12]{2}^4$	$\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt[12]{2}^4} = 0.992125657$
Quart	$\frac{4}{3}$	$\sqrt[12]{2}^5$	$\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt[12]{2}^5} = 0.998871385$
kleine Sext	$\frac{8}{5}$	$\sqrt[12]{2}^8$	$\frac{\frac{8}{5}}{\sqrt[12]{2}^8} = 1.00793684$
grosse Sext	$\frac{5}{3}$	$\sqrt[12]{2}^9$	$\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt[12]{2}^9} = 0.991005929$
kleine Sept	$\frac{16}{9}$	$\sqrt[12]{2}^{10}$	$\frac{\frac{16}{9}}{\sqrt[12]{2}^{10}} = 0.997744043$
grosse Sept	$\frac{15}{8}$	$\sqrt[12]{2}^{11}$	$\frac{\frac{15}{8}}{\sqrt[12]{2}^{11}} = 0.993246651$

Tabelle 13: Vergleich der Frequenzen der Obertöne in Gleichmässiger und Harmonischer Stimmung

Bemerkung 25. *Die Eingangsdefinition von Tonstruktur zeigt, was alles möglich ist. Auf diesem Hintergrund zeigt sich, wie nahe die heute verwendete Tonstruktur an den traditionell verwendeten Tonstrukturen liegt, wobei die Änderungen bezüglich der dadurch eröffeneten Möglichkeiten komplexer Harmonien und Tonartwechsel nicht als klein zu beurteilen sind.*

Bemerkung 26. *Frank Sikora schreibt in seiner Neuen Jazz-Harmonielehre auf der Seite 22: „Heute wird die Oktave in exakt 12 gleich grosse Halbtonschritte geteilt. Sie sind zwar im Vergleich zur Harmonischen Stimmung und aus mathematischer Sicht leicht verstimmt, der Unterschied ist aber so gering, dass er nicht als störend empfunden wird. Die temperierte Stimmung ist also ein Kompromiss, ein Mittelwert, der es nun möglich macht, jeden Ton ohne grössere Probleme mit jedem beliebigen Grundton in Beziehung zu bringen".*

Die Aussage, dass die Gleichmässig Stimmung aus mathematischer Sicht leicht verstimmt ist, lässt sich kaum begründen. Von der Mathematik her kann man keine der Stimmungen auszeichnen. Mathematik dient nur zu deren Beschreibung. Die Gleichmässige Stimmung ist mathematisch betrachtet wohl einfacher als z.B. die Natürliche, Pythagoräische und Harmonische Stimmung, wie die bisherigen Ausführungen belegen. Die Definition der Gleichmässigen Tonstruktur ist viel kürzer: sie nimmt nicht bezug auf eine Frequenztabelle, welche die Intervalle von jeweils einem bestimmten Grundton aus definiert, da alle Intervalle von allen Tönen aus gleich lang sind. Nach diesem Einfachkeitskriterium wäre die Gleichmässige Tonstruktur wohl vorzuziehen, wobei ein solches Kriterium nicht musikalischer Art ist.

Von der Harmonischen Stimmung her gesehen ist die Gleichmässige Stimmung gewiss leicht verstimmt, das gilt aber auch umgekehrt und begründet damit nichts. Die Harmonische Stimmung ruht – geht man nicht von Gefälligkeiten für unser Ohr aus – auf einem recht willkürlichen Sammelsurium von Frequenzverhältnissen. Zuerst kommt zwar eine Ansammlung von sehr einfachen Brüchen mit einer gewissen Systematik vor ($\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$). Dann gibt es aber einen Sprung auf $\frac{9}{8}$, $\frac{16}{15}$ und schliesslich wird's ziemlich willkürlich mit $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{15}{8}$ und $\frac{16}{9}$.Ohne die Gefälligkeiten fürs Ohr könnte man diese Stimmung höchstens als ziemlich gute Näherung an die Gleichmässige Stimmung – mittels recht einfacher Brüche – rechtfertigen, wobei die Einfachheit der Brüche an sich noch kein musikalisches Qualitätskritirium ist. Zuletzt sind in der Harmonischen Stimmung z.B. nicht alle Quinten gleich lang: Beim Grundton C weist die Quinte von C aus das Freqenzverhältnis $\frac{3}{2}$ auf, von D aus jedoch das Frequenzverhältnis $\frac{5/3}{9/8} = 1.481481481$.

Die Gleichmässige Stimmung hat durchaus harmonische Vorzüge, wie ein Vergleich zeigt: Töne der Natürlichen Stimmung können bezüglich anderer Töne der Stimmung misstönig sein (Alphorn-Fa, der 11. Ton der Natürlichen Tonstruktur). In der Folge der Reinen Quinttöne gibt es ebenfalls Töne, die sich schlecht vertragen, wie oben gezeigt wurde. Die Pythagoräische Stimmung enthält die Wolfsquinte, deren Name nicht unbegründet ist. Die Welt der durch physikalischen Schwingungen erzeugten Töne ist für unser Ohr also nicht *harmonisch, ausser man nimmt eine Auswahl vor, welche unserem Ohr schmeichelt oder dieses minimal stört. Die Anwendung der Wörter „rein" und „harmonisch" auf Intervalle, die nicht den Intervallen der Gleichmässigen Stimmung entsprechen, ist historisch begründet und drückt nicht eine höhere Qualität dieser Intervalle aus, d.h. diese Intervalle sind nicht reiner als die gleichmässigen Entsprechungen. Der Ausdruck „Reine Quinte" ist als Name für das Intervall zu betrachten, dessen Länge durch das Frequenzverhältnis* $\frac{3}{2}$ *charakterisiert ist. Entsprechend wurde z.B. in „Reine Quinte" und „Reine Quarte" das Adjektiv jeweils gross geschrieben.*

Diese Bemerkungen wollen übrigens die Verwendung der alten oder alternativer Stimmungen nicht verbieten, ebensowenig die Verwendung von Tönen, die sich gemäss üblichen Hörgewohnheiten schlecht vertragen. In der Tat werden die alten Stimmungen z.B. in der Kammermusik und bei der Verwendung von Streichinstrumenten durchaus gepflegt, vor allem auch, wenn es darum geht, die alten Stücke möglich werkgetreu zu reproduzieren. In diesem Fall wird dann auch zwischen Tönen unterschieden, die enharmonisch bei Gleichmässiger Stimmung nicht zu unterscheiden sind. Fis und Ges z.B. sind dann nicht dasselbe.

2 Tonleitern

Es wird zu Beginn möglichst allgemein verfahren. Dies zeigt, was alles möglich wäre und aus welchen Einschränkungen die üblichen Tonleitern resultieren. Sei $\mathbb{N}^*$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.

Definition 27. *Sei ein Tonstruktur (o, B, F, fr) gegeben. f ist eine Tonleiter genau dann, wenn $f : \mathbb{N}^* \to B$ eine Folge ist, so dass für $j > i$, $i, j \in \mathbb{N}^*$ gilt, $fr\left(f\left(j\right)\right) > fr\left(f\left(i\right)\right)$*

D.h. wenn j grösser als i ist, ist die Frequenz, die dem Ton $f\left(j\right)$ zugeordnet ist, grösser als die Frequenz, die dem Ton $f\left(i\right)$ zugeordnet ist. $f(1)$ ist der erste Ton der Tonleiter, „Grundton der Tonleiter“ genannt. $f\left(2\right)$ der zweite Ton, etc. In der Praxis sind Tonleitern endliche Folgen. Um sich bei manchen der folgenden Diskussionen nicht um die im Zusammenhang belanglosen letzten Töne der Tonleitern kümmern zu müssen, arbeitet man besser mit unendlichen Folgen.

Definition 28. *Die Intervallstruktur der Töne zwischen $f(i)$ und $f\left(j\right)$ mit $i < j$ ist das $(j-1)$-Tupel der Intervalle $(I_i, ..., I_{j-1})$ zwischen $f\left(i\right)$ und $f\left(k\right)$ für $i < k \leq j$. Bei Tonleitern nennen wir die Folge $(I_1, ...)$ der Intervalle zwischen $f\left(k\right)$ und $f\left(1\right)$ für $k > 1$ „Intervallstruktur der Tonleiter“.*

Beispiel 29. *Sei E, F, G, A, H bei gleichmässiger Stimmung gegeben. Dann ist die Intervallstruktur zwischen E und H – mit Hilfe von Cents ausgedrückt:* $(100, 300, 500, 700)$. *Mit Hilfe von Intervallnamen ausgedrückt: (kleine Sekunde, kleine Terz, Quart, Quint). Mit Hilfe der Abkürzungen für die Intervallnamen:* $(\flat 2, \flat 3, 4, 5)$

Definition 30. *Sei $fr\left(f\left(k\right)\right) = 2^n fr\left(f\left(1\right)\right)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Dann heisst $f\left(k\right)$ „n-ter Oktavton der Tonleiter“. Sei $f\left(l\right)$ der erste Oktavton der Tonleiter. Die Töne $f\left(i\right)$ mit $1 \leq i < l$ heissen „Töne der ersten Oktave (der Tonleiter)“. Die Intervallstruktur zwischen $f\left(1\right)$ und dem letzten Ton der ersten Oktave nennen wir „Intervallstruktur der ersten Oktave“. Analog reden wir von der „Intervallstruktur der k-ten Oktave“: sei $f\left(l\right)$ der k-te Oktavton der Tonleiter und $f\left(m\right)$ der $k+1$-te Oktavton der Tonleiter. Die Intervallstruktur der k+1-ten Oktave ist damit die Intervallstruktur der Töne $f\left(o\right)$, so dass $l \leq o < m$.*

Definition 31. *Eine Tonleiter f ist oktav-periodisch genau dann, wenn die Intervallstrukturen der Oktaven identisch sind.*

Die Töne einer oktav-periodischen Tonleiter sind damit jeweils oktavierte Töne der Töne der ersten Oktave. Man kann sich oktav-periodische Tonleitern räumlich als aufsteigende Spirale vorstellen, in der die oktavierten Töne vertikal übereinander stehen, wobei eine Drehung einer Oktave entspricht.

Definition 32. *Wird bei einer Tonleiter mit Grundton $f\left(1\right)$ eine neue Tonleiter f' festgelegt mit $f'\left(1\right) := f(2)$, so dass die Intervallstruktur von $f\left(2\right)$ weg identisch ist mit der Intervallstruktur von f', so nennen wird diese Operation „Verschiebung um 1“. Die Verschiebung erzeugt f' aus f. Verschieben wir f' um 1, so handelt es sich um eine Verschiebung von f um 2, etc.*

Beispiel 33. *Wir schreiben für D mit* $f(i) = D$*:* D_i*. Wir betrachten die Tonleiter*

$$f = (D_1, E_2, F_3, G_4, A_5, H_6, c_7, d_8, ...) .$$

Wir wählen den Ton E_2 *der Tonleiter* f*. Man erhält die neue Tonleiter*

$$f' = (E_1, F_2, G_3, A_4, H_5, c_6, d_7, e_8, ...) .$$

Die Intervallstruktur $\mathbb{I}_f^{-1}$ *von* E_2 *weg ist mit der von* f' *identisch.*

Durch die wiederholte Verschiebung resultiert eine Folge von Tonleitern $f_1, f_2, f_3, ...$, die Menge der durch Verschiebung aus f_1 erzeugten Tonleitern. Bei oktav-periodischen Leitern kann man festlegen:

Definition 34. *Sei* f *eine oktav-periodische Leiter. Dann setzt man* $f_k := f$*, sobald* $f_k(1)$ *der erste Oktavton von* f *ist.*

Bei dieser Festlegung ergibt sich, dass die Operation der Verschiebens abgeschlossen bezüglich der Menge der Tonleitern ist, die sich durch Verschiebung aus der Ausgangstonleitern mittels der Töne der ersten Oktave bei oktav-periodischen Tonleitern ergibt. Die Anzahl der Tonleitern, die erzeugt werden können, entspricht der Anzahl der Töne der ersten Oktave. Oktav-periodische Leitern nennen wir m-tonisch, wenn die Anzahl der Töne der ersten Oktave m beträgt (Beispiele: 5-tonisch (= pentatonisch); 6-tonisch (= hexatonisch); 7-tonisch (=heptatonisch)).

Definition 35. *Sei* $\mathbb{I}_f$ *die Intervallstruktur der Tonleiter* f *und* $\mathbb{I}_{f'}$ *die Intervallstruktur der Tonleiter* f'*, die aus* f *durch k-fache Verschiebung erzeugt wurde. Gilt* $\mathbb{I}_f = \mathbb{I}_{f'}$*, so nennen wir die Verschiebungs-Operation „k-strukturerhaltend".*

Im Spezialfall der oktav-periodischen Leiter mit m Tönen der ersten Oktave, gilt: $\mathbb{I}_{f_{m+1}} = \mathbb{I}_f$. Jede oktav-periodische Leiter ist mindestens m-stukturerhaltend.

Beispiel 36. 1. *Die Tonleiter*

$$f = (D_1, Dis_2, E_3, F_4, Fis_5, G_6, Gis_7, A_8, Ais_9, H_{10}, c_{11}, cis_{12}, d_{13}, ...)$$

wird bei gleichmässiger Stimmung „chromatisch" genannt. Sie ist oktav-periodisch, wenn $f(i + 12)$ *der oktavierte Ton von* $f(i)$ *ist.* f *ist k-stukturerhaltend für* $1 < k$*. Sie definiert 12 Töne pro Oktave.*

2. *Die Tonleiter*

$$f = (A_1, H_2, c_3, d_4, e_5, fis_6, g_7, a_8, ...)$$

ist oktav-periodisch, wenn $f(i + 7)$ *der oktavierte Ton von* $f(i)$ *ist.* f *ist 7-strukturerhaltend. Es gibt kein* $k < 7$*, so dass* f $k-$*strukturerhaltend ist.* f *ist eine heptatonische Tonleiter.*

3. *Die Tonleiter*

$$f = (F_1, A_2, H_3, c_4, e_5, f_6, a_7, h_8, c_9, e_{10}, f'_{11}, \ldots)$$

ist oktav-periodisch, wenn $f(i+5)$ der oktavierte Ton von $f(i)$ ist. f ist 5-strukturerhaltend. Es gibt keine $k < 5$, so dass f k-strukturerhaltend ist. f ist eine pentatonische Tonleiter.

4. *Die Tonleiter*

$$f = (G_1, A_2, H_3, cis_4, dis_5, es_6, g_7, a_8, h_9, cis'_{10}, dis'_{11}, eis'_{12}, g'_{13}, \ldots)$$

ist oktav-periodisch, wenn $f(i+6)$ der oktavierte Ton von $f(i)$ ist. f ist 6-strukturerhaltend und bei gleichmässiger Stimmung k-stukturerhaltend für $1 < k$. f ist eine hexatonische Tonleiter, „Ganztonleiter“ genannt.

5. *Die Tonleiter*

$$f = (G_1, Gis_2, Ais_3, H_4, cis_5, d_6, e_7, f_8, g_9, gis_{10}, ais_{11}, h_{12}, cis'_{13}, \ldots)$$

ist oktav-periodisch, wenn $f(i+8)$ der oktavierte Ton von $f(i)$ ist. f ist 8-strukturerhaltend und bei gleichmässiger Stimmung k-stukturerhaltend für gerade k. f ist eine octatonische Tonleiter, „Halbton-Ganztonleiter“ genannt. Die Ganzton-Halbtonleiter kann man aus f durch Verschiebung mittels eines Schrittes erhalten.

Oktav-periodische Tonleitern kann man mit Hilfe der Intervallstruktur der ersten Oktave definieren. Wir nennen Tonleitern, die durch Verschiebung aus einer Grundtonleiter hergeleitet werden, „leitereigen“, da diese Tonleitern nur Töne der Grundtonleiter verwenden. Im Speziellen ist auch die Grundtonleiter leitereigen. Ebenso nennen wir die Menge der leitereigenen Tonleitern „leitereigen“. Bei leitereigenen Mengen von Tonleitern kann die Intervallstruktur der ersten Oktave einer beliebigen Tonleiter aus der Menge gewählt werden. Durch Verschieben entstehen die Intervallstrukturen der anderen Tonleitern.

Bemerkung 37. *Manchmal wird „diatonisch“ gleichbedeutend mit „leitereigen“ verwendet, manchmal aber eingeschränkt auf die leitereigene Menge der Kirchentonarten (s. u.). Entsprechend wird hier auf das Wort „diatonisch“ verzichtet.*

Bemerkung 38. *In der Folge setzen wir jeweils die gleichmässige Stimmung voraus.*

Für jeden möglichen Grundton gibt es bei gegebener Intervallstruktur der ersten Oktave und unter der Voraussetzung des Vorliegens einer oktav-periodischen Tonleiter eine leiereigenen Menge von Tonleitern.

Übung 39. *Man bilde die leitereigene Menge der pentatonischen Tonleiter des Beispiels 36 und schreibe für jede der leitereigenen Tonleitern die Intervallstruktur der ersten Oktave mit Hilfe der Abkürzungen für die Intervallnamen hin.*

Lösung 40. *s. Tabelle 14.*

	leitereigene Tonleitern	Intervallstruktur
f_1 :	$F_1, A_2, H_3, c_4, e_5, f_6, ...$	$(3, \sharp 4, 5, g7)$
f_2 :	$A_1, H_2, c_3, e_4, f_5, a_6, ...$	$(2, \flat 3, 5, \flat 6)$
f_3 :	$H_1, c_2, e_3, f_4, a_5, h_6, ...$	$(\flat 2, 4, \flat 5, \flat 7)$
f_4 :	$c_1, e_2, f_3, a_4, h_5, c_6 ...$	$(3, 4, 6, g7)$
f_5 :	$e_1, f_2, a_3, h_4, c_5, e_6, ...$	$(\flat 2, 4, 5, \flat 6)$

Tabelle 14: Die leitereigene Menge von pentatonischen Tonleitern des Beispiels 36.

Aus jeder dieser Tonleitern kann man durch Verschiebung die identische Menge von Intervallstrukturen erhalten. Die entsprechenden Tonleitertöne sind entweder identisch oder oktavierte Töne der Ausgangstonleiter. Wählt man z.B. f_3 mit Grundton H_1 und der Intervallstruktur $(\flat 2, 4, \sharp 4, \flat 7)$ als Ausgangstonleiter, erhält man die folgende leitereigene Menge (s. Tabelle 15).

	leitereigene Tonleitern	Intervallstruktur
f_1 :	$H_1, c_2, e_3, f_4, a_5, h_6, ...$	$(\flat 2, 4, \flat 5, \flat 7)$
f_2 :	$c_1, e_2, f_3, a_4, h_5, c'_6 ...$	$(3, 4, 6, g7)$
f_3 :	$e_1, f_2, a_3, h_4, c'_5, e'_6, ...$	$(\flat 2, 4, 5, \flat 6)$
f_4 :	$f_1, a_2, h_3, c'_4, e'_5, f'_6, ...$	$(3, \sharp 4, 5, g7)$
f_5 :	$a_1, h_2, c'_3, e'_4, f'_5, a'_6 ...$	$(2, \flat 3, 5, \flat 6)$

Tabelle 15: Bis auf Oktavierungen mancher Töne zur Tabelle 14 identische Menge von pentatonischen Tonleitern

Keine der Tonleitern leitereigener Mengen ist entsprechend ausgezeichnet.

2.1 Die leitereigenen Kirchenton-Mengen

Wir definieren mit Hilfe der Intervallstruktur der ersten Oktave und bei gleichmässiger Stimmung unter der Voraussetzung, dass es sich um ein oktav-periodische Tonleiter handelt:

$$\mathbb{I} := (Sekunde, kleine\ Terz, Quart, Quint, grosse\ Sext, kleine\ Sept)$$

Im Beispiel wird dadurch die Menge der dorischen Tonleitern bestimmt: für jeden möglichen Grundton erhält man eine dorische Tonleiter. Durch Verschiebung erhält man für eine spezifische dorische Tonleiter daraus jeweils die phrygische, lydische, mixolydische, äolische (natürlich Moll) und lokrische Tonleiter sowie die Dur-Leiter der entsprechenden leitereigenen Menge in dieser Reihenfolge.

Wir wählen als konkretes Beispiel D-Dorisch und damit die leitereigene Menge der Kirchentonleitern, die aus Stammtönen oder oktavierten Stammtönen bestehen: D, E, F, G, A, H, c, d, ... (s. Tabelle 16)

Töne	Intervallstruktur	Name der Tonleiter
D, E, F, G, A, H, c, d, ...	$(2, \flat 3, 4, 5, 6, \flat 7)$	D-Dorische Tonleiter
E, F, G, A, H, c, d, e, ...	$(\flat 2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7)$	E-Phrygische Tonleiter
F, G, A, H, c, d, e, f, ...	$(2, 3, \sharp 4, 5, 6, g7)$	F-Lydische Tonleiter
G, A, H, c, d, e, f, g, ...	$(2, 3, 4, 5, 6, \flat 7)$	G-Mixolydische Tonleiter
A, H, c, d, e, f, g, a, ...	$(2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7)$	A-(natürlich) Moll-Tonleiter
H, c, d, e, f, g, a, h, ...	$(\flat 2, \flat 3, 4, \flat 5, \flat 6, \flat 7)$	H-Lokrische Tonleiter
c, d, e, f, g, a, h, c, ...	$(2, 3, 4, 5, 6, g7)$	C-Dur-Tonleiter

Tabelle 16: Die leitereigene Menge der von D-Dorisch abgeleiteten Kirchentonleitern.

Für jeden Grundton kann man mit Hilfe der Intervallstrukturen eine entsprechende leitereigene Kirchentonleitermenge definieren. Entsprechend gibt es 12 solcher leitereigener Kirchentonleitermengen pro Oktave. Von Oktave zu Oktave weisen diese Mengen intervallstrukturgleiche Elemente (dorisch von D und von d weg, etc.) auf.

Die definierten Tonleitern sind heptatonisch, weisen genau zwei Halbtonschritte zwischen zwei benachbarten Tönen auf, zwischen den übrigen benachbarten Tönen liegen jeweils Ganztonschritte vor. Ton x ist dabei ein benachbarter Ton von y genau dann, wenn mit $y = f(z)$ und $z > 1$ gilt, $x = f(z-1)$ oder $x = f(z+1)$. Für $f(1)$ ist $f(2)$ der benachbarte Ton.

Die leitereigenen Kirchentonleitern können nach verschiedenen Kriterien gruppiert werden. Frank Sikora (2012, S. 47) formt gemäss dem Vorliegen einer kleinen oder grossen Terz zwei Gruppen: die Moll- und die Dur-Gruppe – die Namengebung ist historisch durch die häufige Verwendung von Dur und Moll in der westlichen Musik begründet und aus theoretischer Sicht willkürlich. Man könnte die Gruppen nach dem Terz-Kriterium z.B. auch Dorisch- und Mixolydisch-Gruppe nennen.

Eine weitere Möglichkeit der Gruppierung besteht in der Begutachtung der Tetrachorde. Der erste Tetrachord einer 7-stufigen Tonleiter besteht aus den ersten 4 Tönen der Tonleiter, der zweite aus den letzten 4 Tönen, wenn man den ersten Oktavton der Tonleiter dazu nimmt. Die beiden Tetrachorde werden also zwischen der 4. und 5. Stufe der Tonleiter getrennt. Die Tonleitern Dur, Dorisch und Phrygisch sind dadurch gekennzeichnet, dass die Intervallstruktur des ersten und des zweiten Tetrachordes jeweils identisch ist. Dies sieht man am besten, wenn man die Intervalle zwischen den aufsteigenden Tönen der Tonleitern betrachtet (graue Zellen geben Halbtonschritte an; s. Tabelle 17):

Dur	C	D	E	F	G	A	H	c
Dorisch	D	E	F	G	A	H	c	d
Phrygisch	E	F	G	A	H	c	d	e
Lydisch	F	G	A	H	c	d	e	f
Mixolydisch	G	A	H	c	d	e	f	g
Moll (Äolisch)	A	H	c	d	e	f	g	a
Lokrisch	H	c	d	e	f	g	a	h

Tabelle 17: Klassifizierung der Kirchentonleitern gemäss Tetrachorden

Der zweite Tetrachord von C-Dur z.B. hat damit dasselbe Tonmaterial wie der erste Tetrachord von G-Dur. Analog wird der erste Tetrachord von D-Dur dasselbe Tonmaterial haben wie der zweite Tetrachord von G und so fort – dem Quintenzirkel entlang. Der zweite Tetrachorde der G-Dur-Tonleiter verwendet dabei nicht nur leitereigene Töne der C-Dur-Tonleiter. So muss man bei G-Dur die Terz des zweiten Tetrachords erhöhen – die Kirchtenton-G-Tonleiter ohne Vorzeichen ist ja mixolydisch.

Der zweite Tetrachord von A-Dorisch hat dasselbe Tonmaterial wie der erste Tetrachord von D-Dorisch und der erste Tetrachord von A-Dorisch dasselbe Tonmaterial wie der zweite Tetrachord von D-Dorisch, etc.

Der zweite Tetrachord von H-Phrygisch hat dasselbe Tonmaterial wie der erste Tetrachord von E-Phrygisch. Schreitet man entsprechend fort, kommt man im Quintenzirkel zur jeweiligen Ausgangstonleiter zurück.

2.2 Leitereigene Harmonisch-Moll-Mengen

Harmonisch-Moll-Tonleitern sind oktav-periodische Tonleitern, die durch folgende Intervallstruktur der ersten Oktave definiert sind (Abkürzungen für die Intervalle):

$$(2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, g7)$$

Die Tonleitern weisen also drei Halbtonschritte und einen Hiatus (= übermässige Sekunde) auf. Wir betrachten als Beispiel die Harmonisch-Moll-C-Tonleiter:

C, D, Es, F, G, As, H, c, ...

Durch Verschieben erhält man die Tonleitern der entsprechenden leitereigenen Menge (s. Tabelle 18):

Töne	Intervallstruktur	Name der Tonleiter
C, D, Es, F, G, As, H, c, ...	$(2, \flat 3, 4, 5, \flat 6, g7)$	C-Harmonich-Moll
D, Es, F, G, As, H, c, d, ...	$(\flat 2, \flat 3, 4, \flat 5, 6, \flat 7)$	D-HM2 (D-Lokrisch($\natural$6))
Es, F, G, As, H, c, d, es, ...	$(2, 3, 4, \sharp 5, 6, g7)$	Es-HM3 (Es-Ionisch($\sharp$5))
F, G, As, H, c, d, es, F, ...	$(2, \flat 3, \sharp 4(\sharp 11), 5, 6, \flat 7)$	F-HM4 (F-Dorisch($\sharp$11))
G, As, H, c, d, es, f, g, ...	$(\flat 2(\flat 9), 3, 4, 5, \flat 6(\flat 13), \flat 7)$	G-HM5 (G-Mixo($\flat$9/$\flat$13))
As, H, c, d, es, f, g, as, ...	$(\sharp 2, 3, \sharp 4, 5, 6, g7)$	As-HM6 (As-Lydisch($\natural$9))
H, c, d, es, f, g, as, h, ...	$(\flat 2, \flat 3, 3, \flat 5, \flat 6, \flat\flat 7)$	H-HM7

Tabelle 18: Die leitereigene Harmonisch-Moll-Menge der Ausgangstonleiter C-Harmonisch-Moll.

2.3 Leitereigene Melodisch-Moll-Mengen

Melodisch Moll-Tonleitern sind oktav-periodische Tonleitern, die durch die folgende Intervallstruktur der ersten Oktave bestimmt ist (Abkürzungen für die Intervalle):

$$(2, \flat 3, 4, 5, 6, g7)$$

Die Tonleitern weisen zwei Halbtonschritte und sonst nur Ganztonschritte auf, können aber trotzdem nicht aus der leitereignenen Menge der Kirchentonleitern hergeleitet werden. Durch Verschieben erhält man wieder abgeleitete Tonleitern. Wir betrachten als Beispiel die C-Melodisch-Moll-Tonleiter:

C, D, Es, F, G, A, H, c, ...

Man erhält durch Verschiebung (s. Tabelle 19)

Töne	Intervallstruktur	Namen der Tonleitern
C, D, Es, F, G, A, H, c,...	$(2, \flat 3, 4, 5, 6, g7)$	C-Melodisch-Moll
D, Es, F, G, A, H, c, d, ...	$(\flat 2, \flat 3, 4, 5, 6, \flat 7)$	D-MM2 (D-Dorisch($\flat$2)))
Es, F, G, A, H, c, d, es, ...	$(2, 3, \sharp 4, \sharp 5, 6, g7)$	Es-MM3 (Es-Lydisch($\sharp$5))
F, G, A, H, c, d, es, f, ...	$(2, 3, \sharp 4\,(\sharp 11)\,, 5, 6, \flat 7)$	F-MM4 (F-Myxolydisch($\sharp$11))
G, A, H, c, d, es, f, g, ...	$(2, 3, 4, 5, \flat 6, \flat 7)$	G-MM5 (G-Mixolydisch($\flat$13))
A, H, c, d, es, f, g, a, ...	$(2, \flat 3, 4, \flat 5, \flat 6, \flat 7)$	A-MM6 (A-Lokrisch($\natural$9))
H, c, d, es, f, g, a, h, ...	$(\flat 2, \flat 3, \flat 4, \flat 5, \flat 6, \flat 7)$	H-MM7 (Alteriert)

Tabelle 19: Die leitereigene Melodisch-Moll-Menge mit der Ausgangstonleiter C-Melodisch-Moll.

2.4 Leitereigene Pentatonisch-Moll-Mengen

Moll-Pentatonische Tonleitern werden durch folgende Intervallstruktur der ersten Oktave definiert (Abkürzungen für die Intervalle):

$$(\flat 3, 4, 5, \flat 7)$$

Moll-Pentatonik könnte man z.B. auch Dorische Pentatonik nennen, da die pentatonischen Tonleitertöne in beiden Tonleitern vorkommen. Gemäss diesem Kriterium wäre bezüglich der Menge de Kirchentonleitern eine weitere Namengebungen möglich (welche?). Wir betrachten als Beispiel die Pentatonisch-Moll-C-Tonleiter:

C, Es, F, G, B, ...

Durch Verschieben erhält man die Tonleitern der entsprechenden leitereigenen Menge (s. Tabelle 20):

Töne	Intervallstruktur	Name der Tonleiter
C, Es, F, G, B ...	$(\flat 3, 4, 5, \flat 7)$	Moll-Pentatonik
Es, F, G, B, c, ...	$(2, 3, 5, 6)$	Dur-Pentatonik
F, G, B, c, es, ...	$(2, 4, 5, \flat 7)$	
G, B, c, es, f, ...	$(\flat 3, 5, \flat 6, \flat 7)$	
B, c, es, f, g, ...	$(2, 4, 5, 6)$	

Tabelle 20: Die leitereigene Menge der Tonleitern mit der Pentatonisch-Moll-C-Ausgangstonleiter.

Übung 41. *Zigeuner-Moll-Tonleitern sind durch die folgende Intervallstruktur der ersten Oktave gegeben:*

$$(2, \flat 3, \flat 5, 5, \flat 6, g7)$$

Sie weisen also drei Halbton- und zwei übermässige Sekundenschritte auf. Man bilde die leitereigene Menge der C-Zigeuner-Moll-Tonleiter.

Lösung 42. *Man erhält für den Grundton C die folgenden Töne der ersten Oktave:*

C, D, Es, Ges, G, As, H, ...

und die Menge der leitereigenen Tonleitern (s. Tabelle 21:

Töne	Intervallstruktur	Tonleitername
C, D, Es, Ges,G, As, H, ...	$(2, \flat 3, \flat 5, 5, \flat 6, g7)$	Zigeuner-Moll
D, Es, Ges,G, As, H, c, ...	$(\flat 2, 3, 4, \flat 5, 6, \flat 7)$	
Es, Ges,G, As, H, c, d, es, ...	$(\flat 3, 3, 4, \flat 5, \flat 6, g7)$	
Ges,G, As, H, c, d, es, ges, ...	$(\flat 2, 2, 4, \flat 5, \flat 6, \flat\flat 7)$	
G, As, H, c, d, es, ges, g, ...	$(\flat 2, 3, 4, 5, \flat 6, g7)$	Zigeuner-Dur
As, H, c, d, es, ges, g, as...	$(\sharp 2, 3, \sharp 4, 5, 6, g7)$	

Tabelle 21: Die leitereigene Menge der Tonleitern mit der C-Zigeuner-Moll-Ausgangstonleiter.

Übung 43. *Man erstelle die leitereigene Menge der oktavperiodischen, hexatonischen E-Bluestonleiter, die durch die folgende Intervallstruktur definiert ist:*

$$(\flat 3, 4, \flat 5, 5, \flat 7)$$

Lösung 44. *s. Tabelle 22*

Töne	Intervallstruktur	Tonleitername
E, G, A, Ais, H, d, e, ...	$(\flat 3, 4, \flat 5, 5, \flat 7)$	trad. Bluestonleiter
G, A, Ais, H, d, e, g, ...	$(2, \sharp 2, 3, 5, 6)$	Dur-Blues
A, Ais, H, d, e, g, a, ...	$(\flat 2, 2, 4, 5, \flat 7)$	
Ais, H, d, e, g, a, ais, ...	$(\flat 2, 3, \flat 6, g7)$	
d, e, g, a, ais, h, ...	$(2, 4, 5, \flat 6, 6)$	

Tabelle 22: Die leitereigene Menge der Tonleitern mit der E-Blus-Ausgangstonleiter

Manchmal wird die hier definierte Bluestonleiter durch Hinzufügen einer grossen Terz zu einer heptatonischen Tonleiter erweitert.

Übung 45. *Bisher ergaben sich zwei Mengen von oktavperiodischen, leitereigenen und heptatonische Tonleitern mit zwei Halbtonschritten und fünf Ganztonschritten (Kirchentonarten und von Melodisch Moll abgeleitete Tonleitern). Man beantworte die Frage: wie viele weitere solche Mengen gibt es?*

Lösung 46. *Man betrachte Tonleitern der gegebenen Art, gehe in diesen bis zum ersten Halbtonschritt und zähle von dort weg die Anzahl der Ganztonschritte bis zum nächsten Halbtonschritt. Dann zähle man von diesem Halbtonschritt die Anzahl Ganztonschritte bis zum nächsten Halbtonschritt. Die Kirchentonarten zeichnen sich dadurch, dass es derart folgende zwei Gruppen von Ganztonschrittreihen zwischen den Halbtonschritten gibt: eine umfasst zwei Ganztöne, die andere Ganztonschrittreihe umfasst drei Ganztöne. Schreitete man die Tonleiter vom ersten Halbtonschritt weg derart hinauf, wechseln sich diese Gruppen ab. Jede zweite Gruppe umfasst gleichviele Ganztonschritte. Manche Tonleitern fangen mit Dreiergruppen an (Dur, Dorisch, Phrygisch), manche mit Zweiergruppen (Lydisch, Mixolydisch, Moll, und Lokrisch).*

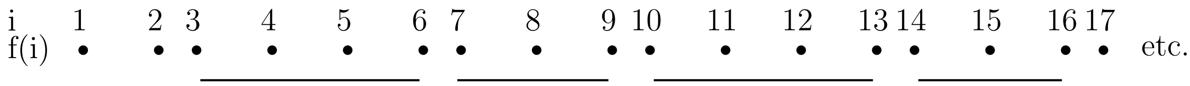

Abbildung 2: Graphik zu den Ganztonschrittreihen (Familie der Kirchentonarten; Dorisch-Tonleiter). Unterstrichen sind die Ganztonschritte zwischen zwei Halbtonschritten.

Man kann die Menge der Kirchentonarten also durch die Menge {2,3} charakterisieren, die Anzahlen der Ganztonschritte zwischen den Halbtonschritten.
Die Menge der von Melodisch Moll abgeleiteten Tonleitern sind durch die folgenden zwei Gruppen von Ganztonschrittreihen bestimmt: eine umfasst einen Ganzton und die andere 4 Ganztöne.
Jede alternative Menge von leitereigenen Tonleitern mit den erwähnten Eigenschaften muss zwei solcher Gruppen von Granztonreihen aufweisen, mit dem Spezialfall, dass eine der Gruppen leer ist. Damit ergeben sich zusätzlich zu den erwähnten Möglichkeiten {2, 3}

(Kirchentonarten) und {1,4} (von Melodisch Moll abgeleitete) nur die Möglichkeit {0, 5} - die Summe der Anzahl Ganztonschritte muss 5 ergeben. Die beiden Halbtonschritte liegen also bei den Tonleitern dieser leitereigenen Menge nebeneinander.

Übung 47. *Wieviele heptatonische, oktavperiodische Tonleitern lassen sich aus den Tönen der chromatischen Tonleiter bilden?*

Lösung 48. *Es handelt sich um ein Problem der Kombinatorik: Vieviele Teilmengen mit 7 Objekten kann man aus 12 Objekten bilden (Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen).* $\binom{12}{7} = 792$. *Für hexatonische Tonleitern gibt es* $\binom{12}{6} = 924$ *solcher Tonleitern. Für pentatonische Tonleitern gibt es* $\binom{12}{5} = 792$ *solcher Tonleitern.*

3 Tonleitern und Akkorde

Akkorde bestehen aus mindestens zwei Tönen, die zur selben Zeit oder sehr eng nacheinander gespielt werden. Leitereigene Akkorde sind Akkorde, die aus den Tönen der zugrunde liegenden Tonleiter gebildet werden.

Wir betrachten als Beispiel die Menge der aus G-Myxolydisch durch Verschiebung abgeleiteten Tonleitern. Die gebräuchlichsten Akkorde werden mittels Terzschichtung gebildet. Bei leitereigenen Akkorden werden dabei vom jeweiligen Grundton des Akkordes aus kleine und grosse Terzen nacheinander so geschichtet, dass leitereigene Töne verwendet werden. Am Beispiel G-Mixolydisch mit den Tönen G, A, H, c, d, e, f erhält man durch Terzschichtung:

	Dreiklangakkord	Vierklangakkord
Töne	G H d	G H d f
Intervallstruktur	3 5	3 5 $\flat 7$

Analog kann man die leitereigenen Akkorde der übrigen Tonleitern bestimmen, die von G-Mixolydisch durch Verschieben ableitbar sind. Man erhält, wobei für die Töne der Dreiklänge jeweils nur die ersten drei Töne und die Intervallstruktur der Dreiklänge jeweils nur die beiden ersten Intervalle zu berücksichtigen sind (s. Tabelle 23):

Töne	Intervallstruktur	Akkordsymbol für Dreiklang	Akkordsymbol für Vierklang	aus
G, H, d, f	$((3,5),\flat 7)$	G	G^7	Mixolydisch
A, c, e, g	$((\flat 3,5),\flat 7)$	Am	Am^7	Natürlich Moll
H, d, f, a	$((\flat 3,\flat 5),\flat 7)$	H^o	$Hm^{7\flat 5}$, $H^{\emptyset}$	Lokrisch
C, E, G, H	$((3,5),g7)$	C	$C^{\Delta 7}$	Dur
D, F, A, c	$((\flat 3,5),\flat 7)$	Dm	Dm^7	Dorisch
E, G, H, d	$((\flat 3,5),\flat 7)$	Em	Em^7	Phrygisch
F, A, c, e	$((3,5),g7)$	F	$F^{\Delta 7}$	Lydisch

Tabelle 23: Akkorde gemäss Terzschichtung aus den leitereigenen Tonleitern der G-Mixolydisch-Tonleiter

In den Akkordsymbolen drückt der Grossbuchstabe jeweils den Grundton des Akkordes aus, der mit dem Grundton der entsprechenden Tonleiter zusammenfällt. Dreiklang-Akkorde mit der Intervallstruktur $(3,5)$ werden „Dur-Akkorde“ genannt, Dreiklang-Akkorde mit der Intervallstruktur $(\flat 3,5)$ werden „Moll-Akkorde“ genannt. Vierklangakkorde mit der Intervallstruktur $(3,5,g7)$ werden „Gross-Sept-Akkorde“ genannt („Major-Sept-Akkorde“). Vierklangakkorde mit der Intervallstruktur $(3,5,\flat 7)$ werden „Sept-Akkorde“ genannt. Vierklangakkorde mit der Intervallstruktur $(\flat 3,5,\flat 7)$ werden „Moll-Sept-Akkorde“ genannt. Vierklangakkorde mit der Intervallstruktur $(\flat 3,\flat 5,\flat 7)$ werden „halbvermindert“ genannt.

Umgekehrt bestimmt ein Akkord eine Tonleiter, wenn bekannt ist, aus welcher leitereigenen Menge der Akkord stammt. So kann man z.B. die Töne von G^7 im obigen Beispiel mit leitereigenen Tönen auffüllen und man erhält G, A, H, c, d, e, f, – also die Töne der ersten Oktave der mixolydische G-Tonleiter. Innerhalb einer leitereigenen Menge von Tonleitern liegt eine bijektive Abbildung zwischen Akkorden und Tonleitern vor. Im G-Myxolydisch-Beispiel resultieren drei Moll-Sept-Akkorde. Diese haben aber verschiedene Grundtöne, wodurch im leitereigenen Rahmen für diese Moll-Sept-Akkorde verschiedene Tonleitern gegeben sind. Demselben Moll-Sept-Akkord wird in einer anderen leitereigenen Menge (z.B. F-Dur und abgeleiteten Tonleitern) eine andere Tonleiter zugeordnet, sofern der entsprechende Akkord vorkommt. So ist der Grundton des Am^7-Akkordes in G-Myxolydisch der zweite Ton der Tonleiter mit der dem Akkord entsprechenden Tonleiter A-Moll, in F-Dur ist A aber der 3. Ton der Tonleiter mit der dem Akkord Am^7 entsprechenden Tonleiter A-Phrygisch.

Auch aus anderen Tonleitern kann man leitereigene Akkorde aufbauen. Am Beispiel von C-Harmonisch-Moll ergeben sich die folgenden leitereigenen 3- und 4-Klang-Akkorde (Terzschichtung): C, D, Es, F, G, As, H, C, d, es, f, g, as, ... (s. Tabelle 24)

Ton	Intervalle von Grundton aus	Akkordsymbol für Dreiklang	Akkordsymbol für Vierklang	aus der Tonleiter
C, Es, G, H	$((\flat 3, 5), g7)$	Cm	$\mathrm{Cm}^{\Delta 7}$	C-HMoll
D, F, As, c	$((\flat 3, \flat 5), \flat 7)$	D^{o}	$\mathrm{Dm}^{7\flat 5}$,$\mathrm{D}^{\emptyset}$	D-Lokrisch($\natural$6)
Es, G, H, d	$((3, \sharp 5), g7)$	$\mathrm{E}\flat^{+}$	$\mathrm{E}\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	Es-Ionisch($\sharp$5)
F, As, c, es	$((\flat 3, 5), \flat 7)$	Fm	Fm^{7}	F-Dorisch($\sharp$11)
G, H, d, f	$((3, 5), \flat 7)$	G	G^{7}	G-Mixo($\flat$9/$\flat$13)
As, c, es, g	$((3, 5), g7)$	$\mathrm{A}\flat$	$\mathrm{A}\flat^{\Delta 7}$	As-Lydisch($\natural$9)
H, d, f, as	$((\flat 3, \flat 5), \flat\flat 7)$	H^{o}	H^{o7}	H-HM7

Tabelle 24: Akkorde gemäss Terzschichtung aus den leitereigenen Tonleitern der C-Harmonisch-Moll-Tonleiter

Akkorde der Form X^{o7} nennen wir „vermindert“.

Schliesslich kann man auch aus Melodisch Moll leitereigene Akkorde mittels Terzschichtung bilden. Für C-Melodisch-Moll erhält man die folgenden leitereigenen 3- und 4-Klang-Akkorde (Terzschichtung): C, D, Es, F, G, A, H, C, d, es, f, g, as, ... (s. Tabelle 25)

Ton	Intervalle von Grundton aus	Akkordsymbol für Dreiklang	Akkordsymbol für Vierklang	aus der Tonleiter
C, Es, G, H	$((\flat 3, 5), g7)$	Cm	$\mathrm{Cm}^{\Delta 7}$	C-MM
D, F, A, c	$((\flat 3, 5), \flat 7)$	Dm	Dm^{7}	D-Dorisch($\flat$2))
Es, G, H, d	$((3, \sharp 5), g7)$	$\mathrm{E}\flat^{+}$	$\mathrm{E}\flat^{\Delta 7 \sharp 5}$	Es-Lydisch($\sharp$5)
F, A, c, es	$((3, 5), \flat 7)$	F	F^{7}	F-Myxolydisch($\sharp$11)
G, H, d, f	$((3, 5), \flat 7)$	G	G^{7}	G-Mixolydisch($\flat$13)
A, c, es, g	$((\flat 3, \flat 5), \flat 7)$	A^{o}	$\mathrm{Am}^{7\flat 5}$,$\mathrm{A}^{\emptyset}$	A-Lokrisch($\natural$9)
H, d, f, a	$((\flat 3, \flat 5), \flat 7)$	H^{o}	$\mathrm{Hm}^{7\flat 5}$,$\mathrm{H}^{\emptyset}$	Alteriert

Tabelle 25: Akkorde gemäss Terzschichtung aus den leitereigenen Tonleitern der C-Melodisch-Moll-Tonleiter

Um bei Akkordfolgen die Spannung zu erhöhen, werden oft zusätzliche leitereigene Töne verwendet (z.B. Nonakkorde), manche weggelassen (z.B. die Quint) oder ersetzt (z.B. sus4-Akkorde). Die entsprechenden Akkorde werden im Zusammenhang mit Akkordfolgen eingeführt. Zuletzt werden in Akkordfolgen auch Akkorde verwendet, welche nicht nur leitereigene Töne verwenden (nicht-leitereigene Akkorde).

4 Akkordfolgen

Musik besteht oft aus Akkordfolgen, über denen eine Melodielinie liegt. In der Folge geht es darum, einige der häufig anzutreffenden Akkordfolgen zu beschreiben.

4.1 Kadenzen in der leitereigenen Menge der Kirchentonarten

Wichtige Akkordfolgen stellen die sogenannten Vollkadenzen dar. Vollkadenz werden selten in einem Musikstück vollständig gespielt, wobei durchaus alle Akkorde einer Vollkadenz auftauchen können. Vollkadenzen stellen aber einen wichtigen Ausgangspunkt für Teilkadenzen dar.

Wir gehen von der C-Dur-Tonleiter aus und entwickeln gemäss den obigen Ausführungen die entsprechenden leitereigenen 4-Klang-Akkorde. Man erhält:

Tonleiter	C-Dur	D-Dorisch	E-Phrygisch	F-Lydisch	G-Mixol.	A-Moll	H-Lokrisch
Akkord	$C^{\Delta 7}$	Dm^7	Em^7	$F^{\Delta 7}$	G^7	Am^7	$Hm^{7\flat 5}$
Stufe	I	II	III	IV	V	VI	VII

Die Stufen geben an, der wievielte Ton der C-Dur-Tonleiter der Grundton des jeweiligen Akkordes ist. Ordnet man die Akkorde im Quintfall – oder im Quartanstieg (beim Übergang von der vierten zur siebten Stufe erfolgt eine verminderte Quint (übermässige Quart), um bei den leitereigenen Akkorden zu verbleiben), erhält man die sogenannte Vollkadenz in C-Dur:

Stufe	I	IV	VII	III	VI	II	V	I
	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7	$C^{\Delta 7}$

Beim Übergang in der Vollkadenz von einem Akkord zum nächsten gilt folgendes: zwei Töne bleiben konstant, werden aber umgedeutet. Zwei Töne werden leitereigen um eine Stufe vermindert. Konkret: Aus $C^{\Delta 7}$ mit (C, E, G, H) wird $F^{\Delta 7} = (F, A, C, E)$.

- Der Grundton von $C^{\Delta 7}$ wird zur Quintton von $F^{\Delta 7}$.
- Der Terzton von $C^{\Delta 7}$ wird zum grossen Septton von $F^{\Delta 7}$.
- Der grosse Septton H von $C^{\Delta 7}$ wird leitereigen um eine Stufe verringert zu A und damit zur Terzton von $F^{\Delta 7}$.
- Der Quintton G von $C^{\Delta 7}$ wird leitereigen um eine Stufe verringert zu F und wird zum Grundton von $F^{\Delta 7}$.

Wie man selber überprüfen kann, gilt das für alle Übergänge von einem Akkord zum nächsten, benachbarten in der Vollkadenzakkordfolge, also von $F^{\Delta 7}$ zu $Hm^{7\flat 5}$, von $Hm^{7\flat 5}$ zu Em^7, etc.. Es werden bei den sich verändernden Tönen entsprechend möglichst kleine leitereigene Schritte gemacht, was Hörgewohnheiten schmeichelt.

Eine weitere Betrachtung ergibt sich, wenn man die Entwicklungen einzelner Ausgangstöne über die Kadenz hinweg betrachtet. Es entstehen monoton sinkende Linien. Aus dem Grundton entsteht auf gleicher Tonhöhe der Quintton des folgenden Akkordes, aus dem um eine Stufe hinabgesetzten Quintton entsteht wiederum ein Grundton, etc. Aus dem Terzton entsteht ein Septton auf gleicher Tonhöhe, aus dem um eine Stufe hinabgesetzten Septton entsteht wiederum ein Terzton, etc. Am Beispiel von C-Dur ergibt sich eine Grund-Quintton-Folge und eine Quint-Grundton-Tonfolge (Intervallton 1 = Grundton, Intervallton 5 = Quintton, etc.):

Akkord	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7	$C^{\Delta 7}$
Akkordton	C	C	H	H	A	A	G	G
Intervallton	1	5	1	5	1	5	1	5

Akkord	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7	$C^{\Delta 7}$
Akkordton	G	F	F	E	E	D	D	C
Intervallton	5	1	$\flat$5	1	5	1	5	1

Die zweite Tabelle würde sich aus der ersten durch Fortführung der ersten ergeben, ebenso die erste aus der zweiten. Analog ergibt sich eine Sept-Terztonfolge sowie eine Terz-Septtonfolge:

Akkord	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7	$C^{\Delta 7}$
Akkordton	E	E	D	D	C	C	H	H
Intervallton	3	g7	$\flat$3	$\flat$7	$\flat$3	$\flat$7	3	g7

Akkord	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7	$C^{\Delta 7}$
Akkordton	H	A	A	G	G	F	F	E
Intervallton	g7	3	$\flat$7	$\flat$3	$\flat$7	$\flat$3	$\flat$7	3

Auch hier erhält man die zweite Tabelle durch Fortführung der ersten und umgekehrt.

Analog zur obigen Kadenz erhält man für die anderen Grundtöne die folgenden Dur-Vollkadenzen (die bezüglich der Zwischengrundtöne cis/des, dis/es, fis/ges, gis/as, ais/b ergänzt werden könnten) (s. Tabelle 26):

Stufe	I	IV	VII	III	VI	II	V
	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7
	$D^{\Delta 7}$	$G^{\Delta 7}$	$C\sharp m^{7\flat 5}$	$F\sharp m^7$	Hm^7	Em^7	A^7
	$E^{\Delta 7}$	$A^{\Delta 7}$	$D\sharp m^{7\flat 5}$	$G\sharp m^7$	$C\sharp m^7$	$F\sharp m^7$	H^7
	$F^{\Delta 7}$	$B^{\Delta 7}$	$Em^{7\flat 5}$	Am^7	Dm^7	Gm^7	C^7
	$G^{\Delta 7}$	$C^{\Delta 7}$	$F\sharp m^{7\flat 5}$	Hm^7	Em^7	Am^7	D^7
	$A^{\Delta 7}$	$D^{\Delta 7}$	$G\sharp m^{7\flat 5}$	$C\sharp m^7$	$F\sharp m^7$	Hm^7	E^7
	$H^{\Delta 7}$	$E^{\Delta 7}$	$A\sharp m^{7\flat 5}$	$D\sharp m^7$	$G\sharp m^7$	$C\sharp m^7$	$F\sharp^7$

Tabelle 26: Liste der Vollkadenzen in Dur

Für jede Dur-Kadenz erhält man eine Kadenz für die übrigen leitereigenen Tonleitern (Dorisch, Phrygisch, Lydisch, Mixolydisch, Moll (Äolisch), Lokrisch) der entsprechenden leitereigenen Menge. Dies kann man an D-Dorisch durchexerzieren: Die Töne sind:

D, E, F, G, A, H, c, d, e, f, g, a, h, ...

Man bildet daraus mittels Terzschichtung von leitereigenen Tönen Vierklänge und erhält (die dritte Stufe ist nun eine kleine Terz vom Grundton entfernt, die siebte Stufe eine kleine Sept; s. Tabelle 27):

Stufe	Akkordtöne	Akkordsymbol
I:	D, F, A, c	Dm^7
II:	E, G, H, d	Em^7
III:	F, A, c, e	$F^{\Delta 7}$
IV:	G, H, d, f	G^7
V:	A, c, e, g	Am^7
VI:	H, d, f, a	$Hm^{7\flat 5}$
VII:	c, e, g, h	$C^{\Delta 7}$

Tabelle 27: Akkorde der D-Dorisch Stufen

Durch Quintfall ergibt sich

I	IV	VII	III	VI	II	V	I
Dm^7	G^7	$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7

Man erhält also dieselben Akkorde wie für C-Dur, aber alles bezüglich der Stufen verschoben. Analog erhält man die Kadenzen für die anderen Tonarten. Dies führt uns zur Idee des Kadenzzirkels, der für jeden Ton der Tonleiter eine Vollkadenz für die verschiedenen leitereigenen Tonarten liefert, indem man in Pfeilrichtung vom entsprechenden Ton ausgeht. Zudem liefert dieser für eine Vollkadenz das Tonmaterial, das man beim Improvisieren oder bei der Melodieerzeugung über der jeweiligen Stufe üblicherweise braucht: bleibt man leiereigen, braucht man zwar jeweils nur leitereigene Töne der Ausgangstonleiter. Diese werden aber jeweils auf den Grundton des jeweiligen Akkordes hin gespielt, wodurch über dem Akkord automatisch die dazugehörende Tonleiter entsteht.

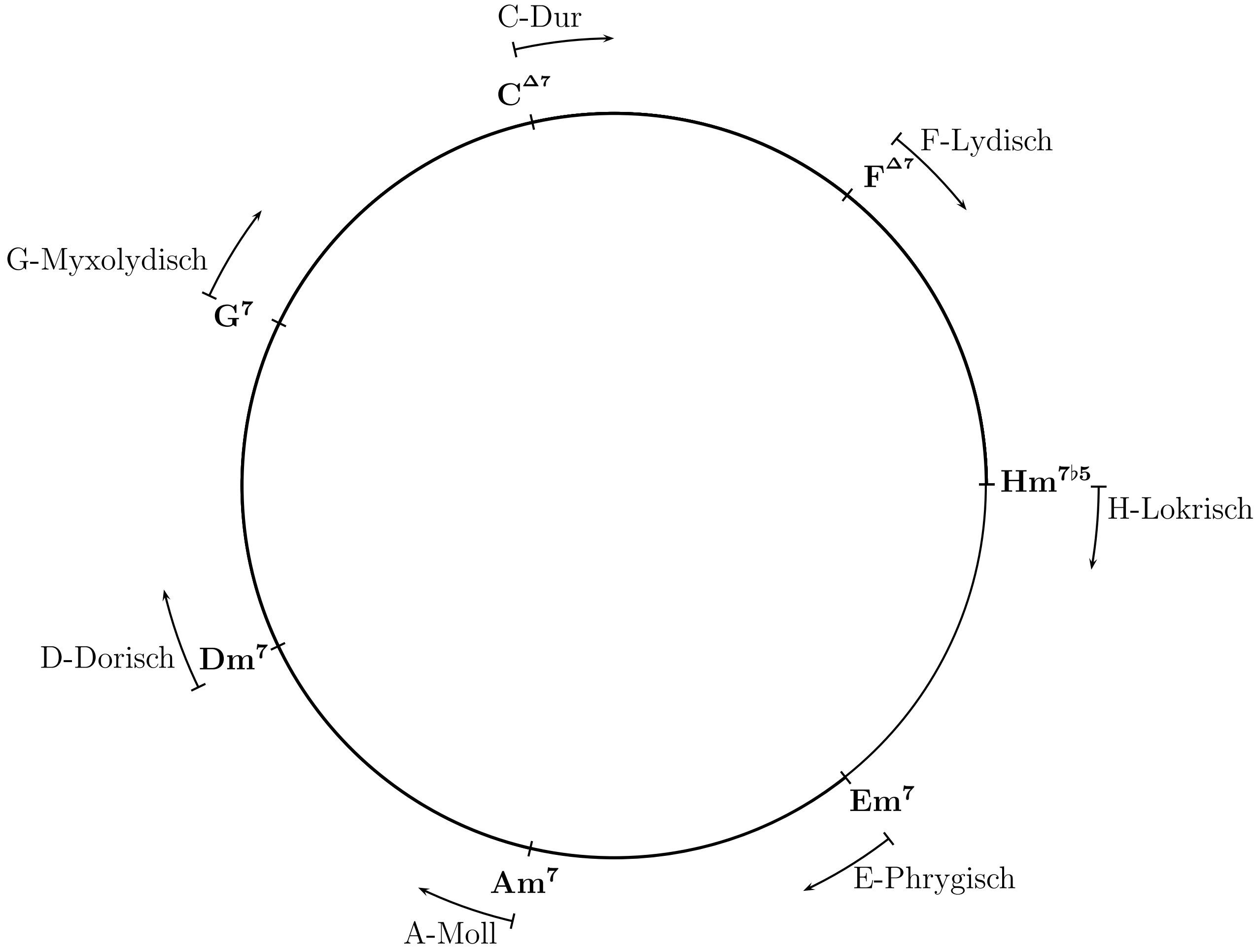

Abbildung 3: Kadenzzirkel für eine leitereigene Menge von Kirchentonarten

Es ist offensichtlich, dass weder Dur noch Moll im Kreis eine Sonderstellung einnehmen. Akkordfolgen mit beliebigem Ausgangspunkt enthalten alle Informationen, um von einem anderen Ausgangspunkt und damit für eine andere Tonleiter aus der betrachteten leitereigenen Menge eine Vollkadenz zu bilden.

Man kann für die anderen Grundtöne analoge Kadenzzirkel entwickeln, wobei die Darstellung kompakter gewählt werden kann – es werden jeweils die enharmonisch identischen, einfacheren Bezeichnungen verwendet. Um für jeden Stammton und die Zwischentöne jeweils eine Kadenz jeden Typs zu erhalten, werden auch die Zwischentonleitern angeführt (s. Tabelle 28).

Dur	Lydisch	Lokrisch	Phrygisch	Moll	Dorisch	Myxolydisch
I	IV	VII	III	VI	II	V
$C^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	Em^7	Am^7	Dm^7	G^7
$Cis^{\Delta 7}$	$F\sharp^{\Delta 7}$	$Cm^{7\flat 5}$	Fm^7	$A\sharp m^7$	$D\sharp m^7$	$G\sharp^7$
$D^{\Delta 7}$	$G^{\Delta 7}$	$C\sharp m^{7\flat 5}$	$F\sharp m^7$	Hm^7	Em^7	A^7
$D\sharp^{\Delta 7}$	$G\sharp^{\Delta 7}$	$Dm^{7\flat 5}$	Gm^7	Cm^7	Fm^7	$A\sharp^7$
$E^{\Delta 7}$	$A^{\Delta 7}$	$D\sharp m^{7\flat 5}$	$G\sharp m^7$	$C\sharp m^7$	$F\sharp m^7$	H^7
$F^{\Delta 7}$	$B^{\Delta 7}$	$Em^{7\flat 5}$	Am^7	Dm^7	Gm^7	C^7
$F\sharp^{\Delta 7}$	$H^{\Delta 7}$	$Fm^{7\flat 5}$	$A\sharp m^7$	$D\sharp m^7$	$G\sharp m^7$	$C\sharp^7$
$G^{\Delta 7}$	$C^{\Delta 7}$	$F\sharp m^{7\flat 5}$	Hm^7	Em^7	Am^7	D^7
$G\sharp^{\Delta 7}$	$C\sharp^{\Delta 7}$	$Gm^{7\flat 5}$	Cm^7	Fm^7	$A\sharp m^7$	$D\sharp^7$
$A^{\Delta 7}$	$D^{\Delta 7}$	$G\sharp m^{7\flat 5}$	$C\sharp m^7$	$F\sharp m^7$	Hm^7	E^7
$A\sharp^{\Delta 7}$	$D\sharp^{\Delta 7}$	$Am^{7\flat 5}$	Dm^7	Gm^7	Cm^7	F^7
$H^{\Delta 7}$	$E^{\Delta 7}$	$A\sharp m^{7\flat 5}$	$D\sharp m^7$	$G\sharp m^7$	$C\sharp m^7$	$F\sharp^7$

Tabelle 28: Die Kadenzzirkel der Kirchentonarten

Möchte man z.B. die D♯-Lokrisch-Kadenz spielen, fängt man bei $D\sharp m^{7\flat 5}$ an, geht in der Zeile Akkord für Akkord nach rechts, springt am Ende der Zeile an den Anfang der Zeile, um dort fortzufahren, bis man zu $D\sharp m^{7\flat 5}$ gelangt. Die Stufenbezeichnungen wandern dabei mit, d.h. über $D\sharp m^{7\flat 5}$ steht I, etc., wobei zu berücksichtigen ist, dass je nach Tonleiter die entsprechenden Stufen teilweise kleinen Sekunden, kleinen Terzen, übermässigen Quarten, verminderten Quinten, kleinen Sexten sowie kleinen Septen entsprechen.

Teilkadenzen

Aus den Vollkadenzen kann man Teilkadenzen bilden. Häufige Teilkadenzen bestehen aus den Stufen (s. Tabelle 29)

Stufen	im Kadenzzirkel	Name
I, V, I	letzte Stufe vor Grundakkord	authentische Kadenz
I, IV, V, I	erste und letzte Stufe nach/vor Grundakkord	erweiterte Kadenz
I, IV, I	erste Stufe nach Grundakkord	plagale Kadenz
I, II, V, I	die zwei letzten Stufen vor Grundakkord	II-V-I-Verbindung
I, VI, II, V, I	die drei letzten Stufen vor Grundakkord	Turnaround
I, III, VI, II, V, I	die vier letzten Stufen vor Grundakkord	

Tabelle 29: Teilkadenzen

In der Literatur sind unterschiedliche Namen für die Teilkadenzen im Umlauf.

Üblicherweise wird der Sept-Akkord der fünften Stufe „Dominante“ genannt. Der Akkord der vierten Stufe wird „Subdominante“ genannt. Sie haben gemäss verbreiteten Hörgewohnheiten einen Auflösungsdrang hin zum Akkord der ersten Stufe, der „Tonika“ genannt wird.

Vollkadenzen für leitereigene Harmonisch-Moll-Mengen

Für C-Harmonisch-Moll ergaben sich oben (s. S 35) die folgenden leitereigenen 4-Klang-Akkorde (Terzschichtung):

Tonleiter	HM1	HM2	HM3	HM4	HM5	HM6	HM7
Akkord	$Cm^{\Delta 7}$	$Dm^{7\flat 5}$	$E\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	Fm^7	G^7	$A\flat^{\Delta 7}$	H^{o7}
Stufe	I	II	III	IV	V	VI	VII

Damit ergibt sich die folgende Vollkadenz:

Stufe	I	IV	VII	III	VI	II	V	I
Akkord	$Cm^{\Delta 7}$	Fm^7	H^{o7}	$E\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	$A\flat^{\Delta 7}$	$Dm^{7\flat 5}$	G^7	$Cm^{\Delta 7}$

Diese Kadenz kann wieder in einem Kadenzzirkel angeordnet werden, um Vollkadenzen für HM2 (Lokrisch(♮6)), HM3 (Ionisch(♯5)), HM4 (Dorisch(♯11)), HM5 (Mixo(♭9/♭13)), HM6 (Lydisch(♯9) und HM7 zu erhalten (s. Tabelle 30):.

HM-Kadenzzirkel

HM	HM2	HM3	HM4	HM5	HM6	HM7
I	IV	VII	III	VI	II	V
$Cm^{\Delta 7}$	Fm^7	H^{o7}	$E\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	$A\flat^{\Delta 7}$	$Dm^{7\flat 5}$	G^7
$C\sharp m^{\Delta 7}$	$F\sharp m^7$	C^{o7}	$E^{\Delta 7\sharp 5}$	$A^{\Delta 7}$	$D\sharp m^{7\flat 5}$	$G\sharp^7$
$Dm^{\Delta 7}$	Gm^7	$C\sharp^{o7}$	$F^{\Delta 7\sharp 5}$	$B^{\Delta 7}$	$Em^{7\flat 5}$	A^7
$D\sharp m^{\Delta 7}$	$G\sharp m^7$	D^{o7}	$F\sharp^{\Delta 7\sharp 5}$	$H^{\Delta 7}$	$Fm^{7\flat 5}$	$A\sharp^7$
$Em^{\Delta 7}$	Am^7	$D\sharp^{o7}$	$G^{\Delta 7\sharp 5}$	$C^{\Delta 7}$	$F\sharp m^{7\flat 5}$	H^7
$Fm^{\Delta 7}$	Bm^7	E^{o7}	$A\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	$D\flat^{\Delta 7}$	$Gm^{7\flat 5}$	C^7
$F\sharp m^{\Delta 7}$	Hm^7	F^{o7}	$A^{\Delta 7\sharp 5}$	$D^{\Delta 7}$	$G\sharp m^{7\flat 5}$	$C\sharp^7$
$Gm^{\Delta 7}$	Cm^7	$F\sharp^{o7}$	$B^{\Delta 7\sharp 5}$	$D\sharp^{\Delta 7}$	$Am^{7\flat 5}$	D^7
$G\sharp m^{\Delta 7}$	$C\sharp m^7$	G^{o7}	$H^{\Delta 7\sharp 5}$	$E^{\Delta 7}$	$A\sharp m^{7\flat 5}$	$D\sharp^7$
$Am^{\Delta 7}$	Dm^7	$G\sharp^{o7}$	$C^{\Delta 7\sharp 5}$	$F^{\Delta 7}$	$Hm^{7\flat 5}$	E^7
$A\sharp m^{\Delta 7}$	$D\sharp m^7$	A^{o7}	$C\sharp^{\Delta 7\sharp 5}$	$F\sharp^{\Delta 7}$	$Cm^{7\flat 5}$	$E\sharp^7$
$Hm^{\Delta 7}$	Em^7	$A\sharp^{o7}$	$D^{\Delta 7\sharp 5}$	$G^{\Delta 7}$	$C\sharp m^{7\flat 5}$	$F\sharp^7$

Tabelle 30: HM-Kadenzzirkel

Vollkadenz für die leitereigene Melodisch-Moll-Menge

Für C-Melodisch-Moll ergaben sich oben (s. S. 41) die folgenden leitereigenen 4-Klang-Akkorde (Terzschichtung):

Tonleiter	MM1	MM2	MM3	MM4	MM5	MM6	MM7
Akkord	$Cm^{\Delta7}$	Dm^7	$E\flat^{\Delta7\sharp5}$	F^7	G^7	$Am^{7\flat5}$	$Hm^{7\flat5}$
Stufe	I	II	III	IV	V	VI	VII

Damit ergibt sich die folgende Vollkadenz:

Stufe	I	IV	VII	III	VI	II	V	I
Akkord	$Cm^{\Delta7}$	F^7	$Hm^{7\flat5}$	$E\flat^{\Delta7\sharp5}$	$Am^{7\flat5}$	Dm^7	G^7	$Cm^{\Delta7}$

Diese Kadenz kann wieder in einem Kadenzzirkel angeordnet werden, um Vollkadenzen für MM2 (Dorisch($\flat$2)), MM3 (Lydisch($\sharp$5)), MM4 (Myxolydisch($\sharp$11)), MM5 (Mixolydisch($\flat$13)), MM6 (Lokrisch($\natural$9)) und MM7 (Alteriert) zu erhalten (s. Tabelle 31).

MM-Kadenzzirkel

MM1	MM2	MM3	MM4	MM5	MM6	MM7
I	IV	VII	III	VI	II	V
$Cm^{\Delta7}$	F^7	$Hm^{7\flat5}$	$E\flat^{\Delta7\sharp5}$	$Am^{7\flat5}$	Dm^7	G^7
$C\sharp m^{\Delta7}$	$F\sharp^7$	$Cm^{7\flat5}$	$E^{\Delta7\sharp5}$	$A\sharp m^{7\flat5}$	$D\sharp m^7$	$G\sharp^7$
$Dm^{\Delta7}$	G^7	$C\sharp m^{7\flat5}$	$F^{\Delta7\sharp5}$	$Hm^{7\flat5}$	Em^7	A^7
$E\flat m^{\Delta7}$	$A\flat^7$	$Dm^{7\flat5}$	$G\flat^{\Delta7\sharp5}$	$Cm^{7\flat5}$	Fm^7	B^7
$Em^{\Delta7}$	A^7	$D\sharp m^{7\flat5}$	$G^{\Delta7\sharp5}$	$C\sharp m^{7\flat5}$	$F\sharp m^7$	H^7
$Fm^{\Delta7}$	B^7	$Em^{7\flat5}$	$A\flat^{\Delta7\sharp5}$	$Dm^{7\flat5}$	Gm^7	C^7
$F\sharp m^{\Delta7}$	H^7	$Fm^{7\flat5}$	$A^{\Delta7\sharp5}$	$D\sharp m^{7\flat5}$	$G\sharp m^7$	$C\sharp^7$
$Gm^{\Delta7}$	C^7	$F\sharp m^{7\flat5}$	$B^{\Delta7\sharp5}$	$Em^{7\flat5}$	Am^7	D^7
$G\sharp m^{\Delta7}$	$C\sharp^7$	$Gm^{7\flat5}$	$H^{\Delta7\sharp5}$	$Fm^{7\flat5}$	$A\sharp m^7$	$D\sharp^7$
$Am^{\Delta7}$	D^7	$G\sharp m^{7\flat5}$	$C^{\Delta7\sharp5}$	$F\sharp m^{7\flat5}$	Hm^7	E^7
$A\sharp m^{\Delta7}$	$D\sharp^7$	$Am^{7\flat5}$	$C\sharp^{\Delta7\sharp5}$	$Gm^{7\flat5}$	Cm^7	F^7
$Hm^{\Delta7}$	E^7	$A\sharp m^{7\flat5}$	$D^{\Delta7\sharp5}$	$G\sharp m^{7\flat5}$	$C\sharp m^7$	$F\sharp^7$

Tabelle 31: Melodisch-Moll-Kadenzzirkel

Die Zusammenstellung der C-Moll-Kadenzen ergibt:

	I	IV	VII	III	VI	II	V
Äolisch	Cm^7	Fm^7	B^7	$E\flat^{\Delta7}$	$A\flat^{\Delta7}$	$Dm^{7\flat5}$	Gm^7
Melodisch Moll	$Cm^{\Delta7}$	F^7	$Hm^{7\flat5}$	$E\flat^{\Delta7\sharp5}$	$Am^{7\flat5}$	Dm^7	G^7
Harmonisch Moll	$Cm^{\Delta7}$	Fm^7	H^{o7}	$E\flat^{\Delta7\sharp5}$	$A\flat^{\Delta7}$	$Dm^{7\flat5}$	G^7

Üblicherweise verwendet man z.B. die 5. Stufe von HM, um die 5. Stufe von Natürlich Moll (äolisch) zu ersetzen (Der m7-Akkord wird durch den entsprechenden 7-Akkord ersetzt). Von Interesse sind zudem Mischungen der Moll-Kadenzen.

In Voll- oder Teilkadenzen werden Akkorde oft durch weitere Akkorde ersetzt, vor- oder nachbereitet, um interessantere Akkordfolgen zu erhalten.

4.2 Ersetzung von Vier-Klang-Akkorden durch leitereigene alternative Akkorde

4.2.1 Ersetzung von Vier-Klang-Akkorden durch einfachere Akkorde

Man kann in Kadenzen Vier-Klang-Akkorde durch die entsprechenden Drei- oder Zweiklang-Akkorde ersetzen. Bei Zweiklang-Akkorden verwendet man den Grundton und die Quint oder den Grundton und die Terz. Diese werden oft durch zusätzliche Oktavierungen verstärkt.

4.2.2 Ersetzung durch terzverwandte Akkorde

Zwei leitereigene terzgeschichtete Akkorde sind terzverwandt genau dann, wenn ihre Grundtöne eine Terz auseinander liegen. Es kann sich um eine kleine oder grosse Terz handeln, da leitereigene Töne zu betrachten sind. Terzverwandte 4-Ton-Akkorde haben drei Töne gemeinsam. Terzverwandtschaft ist eine symmetrische Eigenschaft. Terzverwandtschaft ist keine transitive Eigenschaft. Wenn X mit Y terzverwandt ist und Y mit Z, dann liegen die Akkordgrundtöne von X und Z offensichtlich nicht eine Terz auseinander.

Wir betrachten ein Beispiel in der F-Dur-Vollkadenz. Eine kleine Terz unter F liegt D. Damit ist Dm^7 mit $\mathrm{F}^{\Delta 7}$ terzverwandt. Eine grosse Terz über F liegt A, damit ist Am^7 terzverwandt mit $\mathrm{F}^{\Delta 7}$. Offensichtlich hat es für jeden Akkord zwei terzverwandte leitereigene Akkorde.

4.2.3 Ersetzung durch Akkorde mit leitereigenen Zusatztönen

Fährt man in der Terzschichtung einen Schritt weiter, erhält man 5-Klang-Akkorde. Sie werden Nonakkorde genannt: für die leitereigene Menge der Kirchentonarten, die durch z.B. durch C-Dur (C, D, E, F, G, A, H, c, d, e, f, g, a, h, c, ...) bestimmt ist, erhält man: (s. Tabelle 32)

Stufe	Töne	Intervallstruktur	Akkordsymbol für 4-Klang	Akkordsymbol für 5-Klang	aus der Tonleiter:
I	C, E, G, H, d	$((3,5,g7),9)$	$C^{\Delta 7}$	$C^{\Delta 9}$	C-Dur
II	D, F, A, c, e	$((\flat 3,5,\flat 7),9)$	Dm^{7}	Dm^{9}	D-Dorisch
III	E, G, H, d, f	$((\flat 3,5,\flat 7),\flat 9)$	Em^{7}	$Em^{7\flat 9}$	E-Phrygisch
IV	F, A, c, e, g	$((3,5,g7),9)$	$F^{\Delta 7}$	$F^{\Delta 9}$	F-Lydisch
V	G, H, d, f, a	$((3,5,\flat 7),9)$	G^{7}	G^{9}	G-Mixolydisch
VI	A, c, e, g, h	$((\flat 3,5,\flat 7),9)$	Am^{7}	Am^{9}	A-Äolisch
VII	H, d, f, a, c	$((\flat 3,\flat 5,\flat 7),\flat 9)$	$Hm^{7\flat 5}$	$Hm^{7\flat 5\flat 9}$	H-Lokrisch

Tabelle 32: Nonakkorde

Für Harmonisch Moll erhält man (s. Tabelle 33):

Ton	Intervalle von Grundton aus	Akkordsymbol für Vierklang	Akkordsymbol für Fünfklang	aus der Tonleiter
C, Es, G, H, d	$(\flat 3,5,g7),9)$	$Cm^{\Delta 7}$	$Cm^{\Delta 9}$	C-Harmonisch Moll
D, F, As, c, es	$(\flat 3,\flat 5,\flat 7),\flat 9)$	$Dm^{7\flat 5}$,$D^{\emptyset}$	$Dm^{7\flat 5\flat 9}$	D-Lokrisch($\natural$6)
Es, G, H, d, f	$(3,\sharp 5,g7),9)$	$E\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	$E\flat^{\Delta 9\sharp 5}$	E-Ionisch($\sharp$5)
F, As, c, es, g	$(\flat 3,5,\flat 7),9)$	Fm^{7}	Fm^{9}	F-Dorisch($\sharp$11)
G, H, d, f, as	$(3,5,\flat 7),\flat 9)$	G^{7}	$G^{7\flat 9}$	G-Mixo($\flat$9/$\flat$13)
As, c, es, g, h	$(3,5,g7),\sharp 9)$	$A\flat^{\Delta 7}$	$A\flat^{\Delta 7\sharp 9}$	A-Lydisch($\natural$9)
H, d, f, as, c	$(\flat 3,\flat 5,\flat\flat 7),\flat 9)$	H^{o7}	$H^{o7\flat 9}$	H-HM7

Tabelle 33: Nonakkorde Harmonisch Moll

Für Melodisch Moll erhält man (s. Tabelle 34)

Ton	Intervalle von Grundton aus	Akkordsymbol für Vierklang	Akkordsymbol für Fünfklang	aus der Tonleiter
C, Es, G, H, d	$(\flat 3, 5, g7), 9)$	$Cm^{\Delta 7}$	$Cm^{\Delta 9}$	C-Melodisch Moll
D, F, A, c, es	$(\flat 3, 5, \flat 7), \flat 9)$	Dm^7	$Dm^{7\flat 9}$	D-Dorisch($\flat$2))
Es, G, H, d, f	$(3, \sharp 5, g7), 9)$	$E\flat^{\Delta 7\sharp 5}$	$E\flat^{\Delta 9\sharp 5}$	E-Lydisch($\sharp$5)
F, A, c, es, g	$(3, 5, \flat 7), 9)$	F^7	F^9	F-Myxolydisch($\sharp$11)
G, H, d, f, a	$(3, 5, \flat 7), 9)$	G^7	G^9	G-Mixolydisch($\flat$13)
A, c, es, g, h	$(\flat 3, \flat 5, \flat 7), 9)$	$Am^{7\flat 5}$,$A^{\emptyset}$	$Am^{9\flat 5}$	A-Lokrisch($\natural$9)
H, d, f, a, c	$(\flat 3, \flat 5, \flat 7), \flat 9)$	$Hm^{7\flat 5}$,$H^{\emptyset}$	$Hm^{7\flat 5\flat 9}$	H-Alteriert

Tabelle 34: Nonakkorde Melodisch Moll

Fährt man mit der Terzschichtung weiter, erfolgen 6-Ton-Akkorde (Undezim-Akkorde): Es wird die oktavierte Quart hinzugefügt. Schliesslich kann man 7-Ton-Akkorde bilden: es wird die oktavierte Sext hinzugefügt (Tredezim-Akkorde). Eine zusätzliche Terz-Schicht würde auf eine zweifache Oktavierung des Grundtones hinauslaufen.

Bei vielen Instrumenten – wie z.B. der Gitarre – muss man bei Undezim-Akkorden wegen der Tatsache, dass man nur vier Finger hat (der Daumen stellt selten eine Option dar), oft auf manche Töne des Akkordes verzichten. Häufig wird die Quint weggelassen. Bei Tredezim-Akkorden muss in diesem Fall immer auf mindestens einen Ton verzichtet werden.

Verwendet man in einem Sept-Akkord z.B. nur die 13. Stufe (die 9. und die 11. wird also nicht verwendet), so schreibt man etwa $C^{\Delta 7/13}$ bei grosser Sept oder $C^{7/13}$ bei kleiner Sept. Analog für die 11. Stufe: z.B. $Cm^{7/11}$ für den Moll-Septakkord mit der 11. Stufe und ohne die None. Cm^{11} hingegen bedeutet, dass sowohl die None wie die Undezime verwendet werden.

Bemerkung 49. *Gewöhnlich wird auf gewisse Erweiterungen verzichtet (sogenannte zu vermeidende Töne, avoid notes): Im Quintfall wird – wie gesehen – die Quinte um eine Stufe nach unten versetzt und dieser herabgesetzte Ton wird zum Grundton des folgenden Akkordes (z.B. Übergang von G^7 auf C^{Δ}. Die Quinte von G^7 ist d. Dieser Ton wird um eine Ton vermindert und man erhält c – die Quart von G^7. c wird zum Grundton des folgenden Akkordes). Es wird oft nicht sinnvoll sein, diesen zentralen Ton des folgenden Akkordes im vorangehenden Akkord vorwegzunehmen. Die Quart des vorangehenden Akkordes ist also beim Quintfall ein zu vermeidender Ton.*

Weiterhin kann man Akkorde in der Kadenz durch Akkorde ersetzen, bei denen die Sept weglassen und zusätzliche terzgeschichtete leitereigene Töne hinzufügt werden. Es ergeben sich folgende Akkorde (s. Tabelle 35):

Töne	Intervallstruktur	Akkordsymbol	z.B. aus der Tonleiter:
C, E, G, d	$(3, 5, 9)$	C^{add9}	C-Dur
A, G, E, h	$(\flat 3, 5, 9)$	Am^{add9}	A-Moll
C, E, G, a	$(3, 5, 13)$	C^{6}	C-Dur
A, G, E, fis	$(\flat 3, 5, 13)$	Am^{6}	A-Melod. Moll
C, E, G, d, a	$(3, 5, 9, 13)$	$C^{6/9}$	C-Dur
A, G, E, h, fis	$(3, 5, 9, 13)$	$Am^{6/9}$	A-Melod. Moll

Tabelle 35: Add9-, 6- und 6/9-Akkorde

Die entsprechenden Erweiterungen werden oft eine Oktave tiefer gespielt.

Schliesslich werden Akkorde verwendet, welche die Terz weglassen und sonst leitereigene Terz-Schicht-Töne verwenden (s. Tabelle 36):

Töne	Intervallstruktur	Akkordsymbol	z.B. aus der Tonleiter:
C, G, d	$(5, 9)$	C^{sus2}	C-Dur
C, G, f	$(5, 11)$	C^{sus4}	C-Dur
C, G, B, f	$(5, \flat 7, 11)$	C^{7sus4}	C-Dur
C, G, B, d, f	$(5, \flat 7, 9, 11)$	C^{9sus4}	C-Dur
C, G, f, a	$(5, 11, 13)$	C^{6sus4}	C-Dur

Tabelle 36: sus2- und sus4-Akkorde

Die sus4-Akkorde haben gemäss verbreiteten Hörgewohnheiten eine besonders starke Auflösungstendenz.

4.2.4 Ersetzung durch Umkehrungen der Akkorde

Umkehrungen bestehen darin, dass in der Terzschichtung die Tonhöhenreihenfolge nicht beachtet wird. Bei manchen Instrumenten geht es ohne Umkehrungen ohnehin nicht. Umkehrungen können interessante Farbtöne in eine Akkordfolge bringen.

4.3 Ersetzen durch nicht-leitereigene Akkorde

Oft werden in Akkordfolgen nicht-leitereigene Akkorde verwendet, Akkorde also, die mindestens einen leiterfremden Ton enthalten. Als leitereigen werden dabei immer die Töne betrachtet, die in Tonleitern der leitereigenen Menge der Tonleiter enthalten sind, in welcher ein Musikstück oder der betreffende Teil eines Musikstückes steht.

4.3.1 Sekundär-Dominanten

Sekundär-Dominanten – auch „Zwischen-Dominanten“ genannt – sind Sept-Akkorde, welche Akkorde der Kadenz ersetzen, vorbereiten oder nachbereiten. Der Grundton der Sekundär-Dominante ist mit dem Grundton des Akkords, den sie ersetzt, identisch. Als Zielakkord der Sekundär-Dominante betrachten wir den Akkord, der im Quintfall dem ersetzten Akkord folgt. Ist X der Sekundärdominant-Akkord mit dem Zielakkord Y und liegt der Grundton von Y auf der Stufe Z der verwendeten Tonleiter, so schreiben wir V/Z. V steht dabei für die fünfte Stufe bezüglich des Zielakkordes.

Beispiel 50. *Die Beispiele stehen in G-Dur:*

- *Beispiel für Nachbereitung:*

Stufen	*VI*	*II*	*V/V*	*V*	*I*
Akkorde	*Em*^{7}	*Am*^{7}	*A*^{7}	*Dm*^{7}	*G*$^{\Delta 7}$

- *Beispiel für Ersetzung: Em*^{7}*, A*^{7}*, Dm*^{7}*, G*$^{\Delta 7}$*;*
- *Beispiel für Vorbereitung: Em*^{7}*, A*^{7}*, Am*^{7}*, Dm*^{7}*, G*$^{\Delta 7}$

Beispiel 51. *In Fita amarela (in A-Moll) von Noel Rosa beim Text „Se existe alma, Se há outra encarnacão“ (Sekundär-Dominante folgt dem Kadenzakkord):*

Akkorde	*Am*	*A*^{7}	*Dm*
Stufen	*I*	*V/IV*	*IV*

Für die G-Dur-Vollkadenz z.B. kann man folgende Sekundär-Dominanten verwenden (s. Tabelle 37):

Stufen der Sekundärdominante	V/I	V/II	V/III	V/IV	V/V	V/VI	V/VII
Sekundärdominante	D^7	E^7	F$\sharp^7$	G^7	A^7	H^7	C$\sharp^7$/C^7
Leitereigener Zielakkord	G$^{\Delta 7}$	Am^7	Hm^7	C$^{\Delta 7}$	D^7	Em^7	F$\sharp$m$^{7\flat 5}$
Stufen des Zielakkordes	I	II	III	IV	V	VI	VII

Tabelle 37: Sekundär-Dominanten für G-Dur

Der Quintfall von V/I resultiert bereits aus der Vollkadenz. Damit ist der entsprechende Sept-Akkord im Gegensatz zu den anderen leitereigen. Man kann dies als Spezialfall einer Sekundär-Dominante betrachten. Da in der Voll-Kadenz der Schritt von der vierten auf die siebte Stufe mittels einer verminderten Quint erfolgt, könnte man argumentieren, der

$C\sharp^7$-Akkord sei durch den C^7-Akkord zu ersetzen. C^7 (C, E, G, B) hat nur einen nicht-leitereigenen Ton – nämlich B, während $C\sharp^7$ drei nicht-leitereigene Töne aufweist. Bei C^7 sind alle Grundtöne der Sekundär-Dominanten jeweils Töne der G-Dur-Tonleiter – bei der Wahl von $C\sharp^7$ liegt ein Grundton nicht in der G-Dur-Tonleiter. Für beide Varianten können stimmige Akkordfolgen entwickelt werden (s. Tabelle 38).

Akkord	Töne	nicht-leitereigener Ton	Intervall zum Grundton des Akkordes
E^7	E, Gis, H, D	Gis	3
$F\sharp^7$	Fis, Ais, Cis, E	Ais, Cis	3
G^7	G, H, D, F	F	$\flat 7$
A^7	A, Cis, E, G	Cis	3
H^7	H, Dis, Fis, A	Dis	3
$C\sharp^7$	Cis, Eis, Gis, H	Cis, Eis, Gis	$3, 5$
C^7	C, E, G, B	B	$\flat 7$

Tabelle 38: Nicht-leitereigene Töne der Sekundär-Dominanten von G-Dur

Melodiebildung erfolgt über Sekundärdominant-Akkorden oft dadurch, dass Töne aus dem Sekundär-Dominant-Akkord sowie leitereigene Töne gewählt werden.

4.3.2 Substitutdominanten

Eine weitere Möglichkeit, Akkorde zu ersetzen, vor- oder nachzubereiten, besteht in der Verwendung von Substitutdominanten (auch „Vertreterdominanten“ genannt).

Die folgenden Betrachtungen werden am Beispiel von C-Dur durchgeführt. In diesem Fall ist $\mathbf{G}^7$ der Dominant-Sept-Akkord (Stufe V) von $\mathbf{C}^{\Delta 7}$. Zwischen dem Terzton von $\mathbf{G}^7$ (= h) und dem kleinen Septton von $\mathbf{G}^7$ (= f) liegt ein Tritonus vor (3 ganze Töne oder 6 Halbtöne). Oktaviert man den Terzton und betrachtet man den kleinen Septton von $\mathbf{G}^7$ als Terzton eines noch zu bestimmenden Sept-Akkordes, liegt zwischen diesem Terzton und dem oktavierten Ton wiederum ein Tritonus vor, der oktavierte Ton wird also zum $\flat 7$-Ton des noch zu bestimmenden Akkordes. Sucht man noch den passenden Grundton und ergänzt mit der entsprechenden Quinte (as), erhält man den Sept-Akkord $\mathbf{D}\flat^7$. Man nennt $\mathbf{D}\flat^7$ die „Substitutdominante von $\mathbf{G}^7$ bezüglich $\mathbf{C}^{\Delta 7}$“, da manchmal $\mathbf{G}^7$ durch $\mathbf{D}\flat^7$ ersetzt wird – unter Beibehaltung der Auflösungstendenz nach $\mathbf{C}^{\Delta 7}$. Die Ersetzung wird „Tritonussubstitution“ genannt.

Bemerkung 52. *Die kleine Sept von* $\mathbf{D}\flat^7$ *ist eigentlich ces (enharmonische Verwechslung mit h)*

Bemerkung 53. *Statt die Terz zu oktavieren, kann man diese unter Umdeutung in* $\flat 7$ *beibehalten. Man erhält eine Umkehrung des* $\mathbf{D}\flat^7$*-Akkordes:*

Abbildung 4: Herleitung der Substitutdominante von $\mathbf{G}^7$ bezüglich $\mathbf{C}^{\Delta 7}$.

Man beachte, dass der Grundton von $\mathbf{C}^{\Delta 7}$ einen halben Ton tiefer liegt als der Grundton von $\mathbf{D}\flat^7$. Der Grundton der Substitutdominante ist nicht leitereigen. Das Intervall zwischen dem Grundton von $\mathbf{D}\flat^7$ und dem Grundton von $\mathbf{G}^7$ ist ein Tritonus. Ist $\mathbf{D}\flat^7$ die Substitutdominante von $\mathbf{G}^7$ bezüglich $\mathbf{C}^{\Delta 7}$, so ist $\mathbf{G}^7$ die Substitutdominante von $\mathbf{D}\flat^7$ bezüglich eines weiteren Akkordes, nämlich $\mathbf{G}\flat^{\Delta 7}$. $\mathbf{D}\flat^7$ und $\mathbf{G}^7$ können also in einem $\mathbf{G}\flat$-Dur-Zusammenhang nach $\mathbf{G}\flat^{\Delta 7}$ aufgelöst werden. Wird die Tritonussubstition in der Teilkadenz II-V-I für die Stufe V vorgenommen, entwickelt sich der Grundton von Akkord zu Akkord jeweils um einen Halbton nach unten. Im Beispiel von C-Dur: $\mathbf{D}m^7 - \mathbf{D}\flat^7 - \mathbf{C}^{\Delta 7}$.

Analog können Substitutdominanten für alle Stufen (also nicht nur für die fünfte Stufe wie oben) entwickelt werden. Wir schreiben SubV/X für eine Substitutdominante, welche die X. Stufe als Zielakkord hat. Für G-Dur erhält man aus den Sekundärdominanten (s. Tabelle 39):

Sekundärdominante		4-Ton Akkordtöne der Sekundärdominante	Umkehrung von Terz und Quint Grundton	Terz	Quint	kl. Sept	Abkürzung Substitutdom.
D^7	V/I	D, Fis, A, C	As	C	B	Fis=Ges	SubV/I
E^7	V/II	E, Gis, H, D	B	D	F	Gis=As	SubV/II
$F\sharp^7$	V/III	Fis, Ais, Cis, E	C	E	G	Ais=B	SubV/III
G^7	V/IV	G, H, D, F	Des	F	As	H=Ces	SubV/IV
A^7	V/V	A, Cis, E, G	Es	G	B	Cis=Des	SubV/V
H^7	V/VI	H, Dis, Fis, A	F	A	C	Dis=Es	SubV/VI
$C\sharp^7$	V/VII	Cis, Eis, Gis, H	G	H	D	Eis=F	SubV/VII
C^7	V/VII	C, E, G, B	Ges	B	Des	E=Fes	SubV/VII

Tabelle 39: Substitutdominanten G-Dur

Man erhält also (s. Tabelle 40)

Stufen der Substitut-dominante	SubV/I	SubV/II	SubV/III	SubV/IV	SubV/V	SubV/VI	SubV/VII
Substitut-dominante	$A\flat^7$	B^7	C^7	$D\flat^7$	$E\flat^7$	F^7	$G^7/G\flat^7$
Leitereigener Zielakkord	$G^{\Delta 7}$	Am^7	Hm^7	$C^{\Delta 7}$	D^7	Em^7	$F\sharp m^{7\flat 5}$
Stufen des Zielakkordes	I	II	III	IV	V	VI	VII

Tabelle 40: Substitutdominanten G-Dur mit Zielakkord

Bildet man die Substitutdominante aus C^7 bezüglich der G-Dur-Kadenz, so erhält man einen Akkord mit demselben Grundton, in den der Akkord aufgelöst wird.

Substitutdominanten entfernen sich mehr von der Leitereigenheit als die Sekundärdominanten. Bereits manche Grundtöne sind nicht leitereigen und ausser bei zwei Akkorden enthalten die Akkorde mehr als einen nicht-leitereigen Ton (G-Dur: G, A, H, c, d, e, fis, g; s. Tabelle 41):

Akkord	Töne	nicht-leitereigen Töne	Intervalle der nicht-leiteriegenen Töne zum Grundton des Akkordes
$A\flat^7$	As, c, es, ges	As, es,ges	$5, \flat 7$
B^7	B, d, f, as	B, f, as,	$5, \flat 7$
C^7	C, E, G, B	B	$\flat 7$
$D\flat^7$	Des, F, As, ces=H	Des, F, As	$3, 5$
$E\flat^7$	Es, G, B, des	Es, B, des	$5, \flat 7$
F^7	F, A, c, es	F, es	$\flat 7$
G^7	G, H, d, f	f	$\flat 7$
$G\flat^7$	Ges, B, des, fes=e	Ges, B, des,	$3, 5$

Tabelle 41: Anzahl nicht-leitereigener Töne bei Substitutdominanten

Beispiel 54. *Dm^7, $D\flat^7$, $C^{\Delta 7}$ – die Kadenz wäre II - V - I, d.h. Dm^7, C^7, $F^{\Delta 7}$. Es wird also G^7 ersetzt durch die Substitutdominante $D\flat^7$. Die Grundtöne sinken in Halbtonschritten.*

Stufen	*I*	*II*	*SubV/I*	*I*
Akkorde	$C^{\Delta 7}$	Dm^7	$D\flat^7$	$C^{\Delta 7}$

Beispiel 55. *Beispiel für die Verwendung von Sekundär- und Substitutdominanten: Garota di Ipanema von Antônio Carlos Jobim (Text Vinícius de Moraes) in F-Dur (Akkorde zum*

Gesangsteil mit dem Text: Olha que coisa mais linda, Mais cheia de graça, É ela, menina, Que vem e que passa, Num doce balanço, Caminho do mar)

Stufen	*I*	*V*	*II*	*V*	*I*
Akkorde Kadenz	$F^{\Delta 7}$	C^7	Gm^7	C^7	$F^{\Delta 7}$
ersetzt Akkord in zweiter Zeile		G^7		$G\flat^7$	
Stufen der Ersetzung	*I*	*V/I*	*II*	*SubV/I*	*I*

Manchmal werden auch Erweiterungen der Septakkorde eingebaut, statt G^7 wird z.B. G^{13} verwendet.

Tonmaterial für die Melodiebildung ist oft Mixo($\sharp$11) (MM4) bezüglich des Grundtones der Substitutdominante. Diese Tonleiter erhält man, indem man der Substitutdominante zuerst - wie bei Sept-Akkorden üblich - Mixolydisch zuordnet und dann die vierte Stufe ersetzt durch den Grundton der durch die Substitutdominante ersetzten Sekundärdominante. Am Beispiel für SubV/I von G-Dur:

	Grundton		Terz	4 = 11	Quint		kl. Sept
$A\flat^7$	As		c		es		ges
aufgefüllt Mixolydisch	As	B	c	des	es	f	ges
Mixo($\sharp$11)	As	B	c	d	es	f	ges

Durch die Ersetzung der 4. Stufe wird ein Bezug zur entsprechenden Sekundärdominante hergestellt.

Verschiebt man auf der Mixo($\sharp$11)-Skala den Grundton auf den Grundton der Sekundärdominante, erhält man die alterierte Skala mit der Intervallstruktur ($\flat 2, \flat 3, 3, \flat 5, \flat 6, \flat 7$), im Beispiel also d, es, f, ges, as, b, c.

4.3.3 Dominantketten

Ersetzt man mehrere aufeinander folgende Akkorde in der Kadenz durch Sekundärdominanten, erfolgt eine sogenannte Dominantkette: z.B. in F-Dur: A^7, D^7, G^7, C^7, $F^{\Delta 7}$. Dominantketten kann man auch mit Substitutdominanten bilden: z.B. in F-Dur: $A\flat^7$, $D\flat^7$, $G\flat^7$, $F^{\Delta 7}$. Dominantketten können auch aus Substitut- und Sekundärdominanten gemischt sein. Wird länger auf einem Akkord einer Dominantkette verblieben, wird oft die mixolydische Tonleiter verwendet, bei schnelleren Akkordwechseln eher HM5, Mixo($\sharp$11), Mixo($\flat$13) oder Alteriert (MM7).

Beispiel 56. *„Sweet Georgia Brown“ von Kenneth Casey (Text), Ben Bernie und Maceo Pinkard (Melodie), erste 12 Takte. In 4-Taktschritten sinkt die Akkord-Begleitung des jeweils leicht angepassten Motivs von D^7, G^7, C^7, um schliesslich nach $F^{\Delta 7}$ zu gelangen.*

4.3.4 Das Chromatische Dominantsystem

Schreibt man alle Sekundär- und Substitutdominanten einer Dur-Vollkadenz hin, sieht man, dass man für jeden Halbton eine Dominante erhält. Daher der Name „Chromatisches Dominantsystem“. Ist der Grundton des Dominant-Akkordes nicht leitereigen, mindestens dann liegt eine Substitutdominante vor. Das Beispiel ist in D-Dur (s. Tabelle 42).

Bezeichnung Dominante	Stufe Zielklang	Dominante Beispiel D-Dur	Leitereigener Zielklang
V/I	I	A^7	$D^{\Delta 7}$
SubV/I	I	$E\flat^7$	$D^{\Delta 7}$
V/II	II	H^7	Em^7
SubV/II	II	F^7	Em^7
V/III	III	$C\sharp^7$	$F\sharp m^7$
SubV/III	III	G^7	$F\sharp m^7$
V/IV	IV	D^7	$G^{\Delta 7}$
SubV/IV	IV	$A\flat^7$	$G^{\Delta 7}$
V/V	V	E^7	A^7
SubV/V	V	B^7	A7
V/VI	VI	$F\sharp^7$	Hm^7
SubV/VI	VI	C^7	Hm^7
V/VII	VII	$G\sharp^7$	$C\sharp m^{7\flat 5}$
V/VII	VII	G^7	$C\sharp m^{7\flat 5}$
SubV/VII	VII	$D\sharp^7$	$C\sharp m^{7\flat 5}$
SubV/VII	VII	$D\flat^7$	$C\sharp m^{7\flat 5}$

Tabelle 42: Dominantketten D-Dur

4.3.5 Ersetzung durch Akkorde aus leiterfremden Tonleitern

Verminderte Akkorde Bei der Entwicklung der Harmonisch-Moll-Akkorde stiessen wir auf den sogenannt „verminderten Akkord“ – am Beispiel für die C-HM-Tonleiter entwickelten wir den Akkord H^{o7}. Vermindere Akkorde erhält man auch durch Terzschichtung aus der Halbton-Ganzton-Tonleiter. Am Beispiel der C-Halbton-Ganzton-Tonleiter

C Des Es E Ges G A B c

erhält man die Akkordtöne C, Es, Ges, A, sowie die Intervallstruktur $(\flat 3, \flat 5, \flat\flat 7)$, wobei $\flat\flat 7 = 6$. Verminderte Akkorde bestehen aus zwei verzahnten Tritoni, nämlich im Beispiel von C nach Ges und von Es nach A. Man kann für jeden dieser Tritoni und deren Umkehrung je einen Sept-Akkord erhalten, wenn man diese durch Grundton und Quint entsprechend ergänzt. Fürs Beispiel (enharmonischen Austausch beachten; s. Tabelle 43):

für gegebene	Grundton	grosse Terz	Quint	kleine Sept	Akkord
C, Ges	As	c	es	ges	$A\flat^7$
Ges, c	D	Ges	A	c	D^7
Es, A	H	es	ges	a	H^7
A, es	F	A	c	es	F^7

Tabelle 43: Verminderte Akkorde

Auflösung von C^{o7} nach diesen Akkorden kann interessant sein. Man geht vom verminderten Akkord auf einen Sept-Akkord, der um eine kleine Sext höher, um einen Ganzton höher, um eine grosse Sept höher oder um eine Quart höher liegt.

Andererseits kann man durch verminderte Akkorde Sekundär-Dominanten ersetzen, wobei oft durch sie von einem zum anderen stufen-benachbarten leitereigenen Akkord übergeleitet wird. Dadurch können aufsteigende Basslinien erzeugt werden. z.B. für E-Dur: die zweite Stufe von E ist Fis. Eine Quint höher als Fis ist Cis. Damit ist $C\sharp^7$ der Sekundärdominant-Akkord für Fis. $C\sharp^7$ wird ersetzt durch $E\sharp^{o7}$, was zur zweiten Stufe überleitet, nämlich zu $F\sharp m^7$, etc.

Akkordfolge	$E^{\Delta 7}$	$E\sharp^{o7}$	$F\sharp m^7$	G^{o7}	$G\sharp m^7$	$A^{\Delta 7}$	B^{o7}	H	C^{o7}	$C\sharp m^7$
Sekundäre Dominanten		$C\sharp^7$		$D\sharp^7$			$F\sharp^7$		$G\sharp^7$	
ersetzt durch		$E\sharp^{o7}$		G^{o7}			B^{o7}		C^{o7}	
Stufen	I	V/II	II	V/III	III	IV	V/V	V	V/VI	VI

Ergänzt man die obigen Septakkorde durch den jeweils fehlenden (oktavierten) Ton des jeweils anderen Tritonus, erhält man Akkorde mit der Intervallstruktur

$$(3, 5, \flat 7, \flat 9)$$

mit ähnlichen Auflösungstendenzen und Ersetzungseigenschaften wie die halbverminderten Akkorde.

Akkordtöne	fehlender Ton	Akkord
As, c, es, ges	a	$A\flat^{7\flat 9}$
D, Ges, A, c	es	$D^{7\flat 9}$
H, es, ges, a	c'	$H^{7\flat 9}$
F, A, c, es	ges	$F^{7\flat 9}$

Der Grundton des verminderten Akkordes kommt also entweder durch Ergänzung der Tritoni in dreien der entstehenden Septakkorde und in allen erzeugten Sept-$\flat$9-Akkorden vor.

Die Intervallstruktur $(3, 5, \flat 7, \flat 9)$ erhält man auch für manche leitereigene Akkorde der leitereigenen Mengen von HH und HM oder durch Terzschichtung aus der Halbton-Ganzton-Tonleiter – im obigen Beispiel erhält man den Akkord: C, E, G, B, es.

Zwei Beispiele weiterer Ersetzungsmöglichkeiten Aus der C-Ganzton-Leiter

C D E Fis Gis Ais c d e fis

erhält man in Terzschichtung folgende Intervallstruktur: $(3, \sharp 5, \flat 7)$, abgekürzt als $C^{7\sharp 5} = C^{7\flat 13}$ mit den Tönen C, E, Gis, Ais (=B). Manchmal werden Sekundär-Dominanten durch solche Akkorde ersetzt. Häufig verwendet werden auch Akkorde mit der Intervallstruktur $(3, \flat 7, \sharp 11)$, die man ebenfalls aus der Ganzton-Tonleiter gewinnt. Im C-Ganzton-Beispiel erhält man die Töne C, E, Gis, Ais, fis. Der Akkord wird mit $C^{7\flat 5} = C^{7\sharp 11}$ symbolisiert.

Bemerkung 57. *Zum Zusammenhang von Mathematik und Musik: Musik ist zuerst als physikalische Phänomen zu betrachten. Es werden Schallwellen produziert. In zweiter Linie kann man Musik als physiologisches Phänomen betrachten (Aufnahme der Schallwellen im Ohr und Verabeitung der Reize im Gehirn). In dritter Linie ist Musik als sozialpsychologischen Phänomen zu betrachten - was gefällt uns? Dabei spielen sozial gegebene Hörgewohnheiten und z.B. Abgrenzungsbemühungen gegenüber anderen sozialen Gruppen eine Rolle. Mathematik kommt ins Spiel, wenn man das, was wir als Musik betrachten, systematisch beschreiben will.*

Bemerkung 58. *Zusammengestellt von Paul Ruppen, 5. November 2025. Neueste Version auf https://musik.logik.ch/varia*

Literatur

- Fakultät für Mathematik der Universität Regenburg (2016), *Mathemusik: ... oder wieviel Mathematik steckt in der Musik?*,
  Schülerzirkel Mathematik - Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg, Mathemusik . . . oder wieviel Mathematik steckt in der Musik? Link:
  Thema 4 (2015/2016): Mathemusik

- Christian Hartfeldt, Dr. Wolfram Eid und Prof. Dr. Herbert Henning (2002), Mathematik in der Welt der Töne, Magdeburg. Link: Mathematik in der Welt der Töne

- Sikora, F. (2012), Neue Jazz-Harmonielehre, Mainz: Schott.

- Jungblut A. (1981), Jazz-Harmonielehre, Mainz: Schott

- Gute gemachte, mit Hörbeispielen angereichterte Ausführungen zum Thema Wolfsquinte von Felix Rogge: Der Wolf in der Musik, https://youtu.be/It9smn-z2m0

- Brüderlin, R. (2010), Akustik für Musiker, Kassel: Bosseverlag.

- Towell, G. (2020). Overtone and Harmonics (Physics): Definition, Differences and Frequencies. sciencing.com. Retrieved from Overtone and Harmonics